MAGIA CON NÚMEROS

Félix García Merayo

Vicepresidente de ACTA

Revista Digital de ACTA

2021

Publicación patrocinada por

Magia con Números

No he encontrado nada más bello en la aritmética,
que estos números que algunos llaman Planetarios y otros Mágicos.

Carta de Pierre Fermat al padre Marin Mersenne, 1 de abril de 1640.

Deja que el hombre se dedique al arte que conoce.
Cicerón.

INTRODUCCIÓN

El concepto de *número* fascina, no sólo a los matemáticos, también a los curiosos. Dentro del conjunto de los números, unos poseen una importancia particular en razón a sus propiedades características y a la función que desempeñan en las matemáticas, mientras que encontramos otros que únicamente contribuyen al entretenimiento. Nos limitaremos aquí a trabajar bajo esta última perspectiva y por tanto no nos ocuparemos de temas como, por ejemplo, el *número áureo* φ a pesar de la cantidad de mitos que ha producido, de números remarcables, como los números e, π y el misterio de sus infinitas cifras decimales, o del número i, unidad imaginaria; tampoco nos ocuparemos de los números primos o de los números enteros. Pero, aunque nos vamos a apoyar en estos últimos, no es cuestión en esta ocasión de estudiar sus propiedades, lo que compete a una avanzada *teoría de números*. Mucho de lo que nos va a ocupar no tiene o tiene poca aplicación técnica, por lo que una vez más advertimos de su importancia para el ocio, la diversión y la curiosidad. Hay quien afirma, al referirse a los cuadrados mágicos, que *se trata de una aritmética que no sirve para nada.*

No obstante, entre esas aplicaciones posibles de los cuadrados mágicos debemos reseñar la investigación operativa, la combinatoria, la geometría y, en general, el álgebra lineal.

En los apartados que vamos a recorrer desarrollaremos ideas sobre los *cuadrados mágicos* solo para el recreo, considerando definición, construcción y aplicación, si la hubiera. Dejaremos para otras colaboraciones los *círculos mágicos*, las *estrellas mágicas* y los *cuadrados latinos*.

LOS CUADRADOS MÁGICOS

Vamos a trabajar con series de números enteros encerrados en moldes o cuadrículas y sujetos a unas leyes o normas. Comenzaremos con unas definiciones.

Un *cuadrado mágico* está formado por un conjunto de números enteros positivos y distintos, consecutivos o no, dispuestos en las $n \times n$ celdas contenidas en el interior de un marco cuadrado, es decir, en las n filas y en las n columnas: en total, contendrá n^2 números.

Cuando es posible disponer esos números de forma que las n sumas sobre las filas coincida con las n sumas sobre las columnas, se obtiene un *cuadrado semi-mágico.* Si además, esa suma coincide con la suma de los elementos de la diagonal principal y de la diagonal secundaria, obtenemos un *cuadrado mágico perfecto*. Se dice que n es el *orden* del cuadrado. El valor constante S de esas sumas recibe el nombre de *constante mágica* del *cuadrado mágico* o *semi-mágico.* Un primer ejemplo, sería el representado en la figura 1.

4	**9**	**2**
3	**5**	**7**
8	**1**	**6**

Figura 1. Cuadrado mágico 3 x 3

Se trata de un cuadrado mágico perfecto de orden 3, de constante mágica S=15. Está formado por los números enteros consecutivos del 1 al 9 = 3^2. La suma de los elementos de sus tres filas es

$$4 + 9 + 2 = 3 + 5 + 7 = 8 + 1 + 6 = \mathbf{15}$$

Y la suma de los elementos de sus tres columnas

$$4 + 3 + 8 = 9 + 5 + 1 = 2 + 7 + 6 = \mathbf{15}$$

El mismo valor se obtiene sumando los elementos de sus dos diagonales:

$$4 + 5 + 6 = 2 + 5 + 8 = \mathbf{15}$$

Este cuadrado se considera *básico* porque es el único que existe de orden 3, aunque de él se pueden deducir otros muchos simplemente aplicando a sus elementos, simetrías o rotaciones. Por ejemplo, uno equivalente y, por tanto, con la misma suma 15, sería el siguiente:

8	**1**	**6**
3	**5**	**7**
4	**9**	**2**

Figura 2. Cuadrado mágico perfecto con *S*=15

Este cuadrado mágico deriva del anterior, figura 1, simplemente intercambiando entre ellas las filas uno y tres que equidistan de la fila central del cuadrado. Se dice que se le ha aplicado una simetría. De igual manera podemos obtener otro, también perfecto, de constante 225, sin más que multiplicar por 15 todos los elementos del anterior:

120	**15**	**90**
45	**75**	**105**
60	**135**	**30**

Figura 3. Cuadrado mágico perfecto con *S*=225

Una consecuencia inmediata que se deduce de la construcción de este último cuadrado mágico, figura 3, es que *cada elemento de un cuadrado mágico se puede multiplicar o dividir por un entero resultando así otro cuadrado que también es mágico.* Lo mismo ocurre si se *suma* o *resta* un entero a todos sus elementos.

Todavía nos queda otra propiedad por enunciar apoyada en el concepto de *progresión aritmética.* Una progresión aritmética es una sucesión de números tales que cada uno de ellos se obtiene sumando, progresión *creciente*, o restando, progresión *decreciente*, una cantidad fija, *razón*, al número anterior. Por ejemplo, la siguiente sucesión es una progresión aritmética de razón 3:

2 , 5 , 8 , 11 , 14 , …

Pues bien; esta es la propiedad aludida: *si un cuadrado es mágico para una serie de enteros consecutivos, también lo será si esos enteros se reemplazan respectivamente por los términos de una progresión aritmética cualquiera.*

Partamos del cuadrado de la figura 2 y sustituyamos sus nueve elementos respectivos por los nueve de la progresión aritmética de razón *uno*,

4 , **5** , **6** , **7** , **8** , **9** , **10** , **11** , **12**

La correspondencia es: 1 por **4** , 2 por **5** , 3 por **6**, 4 por **7**, 5 por **8**, 6 por **9**, …. De ese modo obtenemos el cuadrado mágico representado en la figura siguiente:

11	**4**	**9**
6	**8**	**10**
7	**12**	**5**

Figura 4. Cuadrado mágico con *S*=24

Ha de observarse también que si el cuadrado mágico se forma con los enteros consecutivos, 1, 2, 3, …, n^2, dispuestos en n filas y n columnas, entonces su constante mágica vale, $S=n(n^2+1)/2$. En efecto, los elementos consecutivos de la figura 1, dispuestos en un cuadrado 3x3, son 1, 2, …, $9=3^2$ y, por tanto, su constante vale, $S=3(3^2+1)/2=30/2=15$.

Si el cuadrado mágico de orden **3** es el resultado de aplicar una progresión aritmética a otro, como ha ocurrido con el de la figura 4, entonces la constante S de este último se obtiene mediante la fórmula $S=\mathbf{3}(4+12)/2=24$, en la que se hace intervenir, además del orden del cuadrado mágico, **3**, el primer elemento de la progresión, 4, y el último, 12.

Aumentemos ahora el orden del cuadrado mágico con el que hemos trabajado hasta aquí. Un ejemplo de orden cuatro, con 4x4 celdas, sería el que proponemos a continuación en la figura 5. El cuadrado básico de este orden deberá estar formado por los enteros consecutivos 1, 2, 3, …, $16=4^2$, dispuestos en 4 filas y 4 columnas. De acuerdo con la fórmula ya establecida, su constante mágica será, por lo tanto, $S=4(4^2+1)/2=68/2=34$.

1	**15**	**8**	**10**
4	**14**	**5**	**11**
13	**3**	**12**	**6**
16	**2**	**9**	**7**

Figura 5. Cuadrado mágico básico 4x4 con *S*=34

Si se toman los enteros consecutivos 1, 2, 3, 4,…, con los que formar cuadrados mágicos perfectos o semi-mágicos y se consideran únicamente los básicos (sin aplicarles ninguna transformación), entonces el total de unos y otros que pueden construirse, dependiendo de su orden, se indica en la tabla que sigue.

ORDEN	***SEMI-MÁGICOS***	***MÁGICOS***
2	0	0
3	9	1
4	68.688	880
5	579.043.051.200	275.305.224
6	$9{,}459156\text{x}10^{22}$	$1{,}775399\text{x}10^{19}$
7	$4{,}2848\text{x}10^{38}$	$3{,}79809\text{x}10^{34}$

Fue Bernard Frénicle de Bessy (1605-1675), matemático francés nacido en París, quien estableció en 880 el total de cuadrados de orden 4, según figura en uno de sus trabajos publicados póstumamente en 1693. En cuanto a los de orden 6 y 7, los totales que figuran en la tabla anterior son estimaciones debidas a Klaus Pinn y Christian Wieczerkowsky, Universidad de Münster, Alemania, trabajo publicado en 1998 utilizando para ello métodos de Montecarlo y de Mecánica Estadística y ayudados por computadores.

El trabajo aludido de Bessy, titulado *Des Quarrez ou Tables Magiques*, es famoso por contener la denominada forma estándar de Frénicle, representación general de los cuadrados mágicos, como también de los diferentes cuadrados que pueden formase de orden 4, así como su proceso y construcción.

DATOS HISTÓRICOS SOBRE LOS CUADRADOS MÁGICOS

A continuación un poco de historia, en algún caso mezclada con ficción, sobre los cuadrados mágicos formados únicamente por números enteros.

Los cuadrados mágicos ya eran conocidos por los chinos en la edad media, cuadrados que han aparecido en utensilios variados; también los conocían los hindúes. Sabemos que en Oriente, los árabes eran doctos en esa mecánica y los utilizaban con fines numerológicos y mágicos. Pero la primera regla o estudio para su construcción no aparece hasta el siglo XIV. Fue en una publicación sobre cuadrados mágicos del monje griego Moscopule o Manuel Moschopulos. Le puso a esa regla el nombre de *regla del caballo*, dado que es semejante al movimiento de esa pieza en el tablero del ajedrez. En 1691, Philippe de la Hire (1640-1719), matemático, astrónomo y gnomonicista francés, tradujo ese estudio y lo presentó en París en la Academia de Ciencias Francesa.

Por otra parte, los cuadrados mágicos han sido objeto de estudio por personajes como el matemático y pastor luterano alemán Stifel (1487-1567), el matemático francés Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638), el matemático francés Pierre de Fermat (1601-1665), el suizo-ruso Leonhart Euler (1707-1783), Blaise Pascal (1623-1662) y por alguno más, como Gauss (1777-1855) y Edouard Lucas (1842-1891).

Una leyenda china sobre un célebre cuadrado mágico relatada por Philipp I. S. Lei, de Hong Kong, dice que, "En la antigüedad china hubo una gran inundación. Las gentes probaron a ofrecer sacrificios al *Dios del rio*, del rio *Lo*, desbordado por la gran avenida, para calmar su cólera. Cada vez que se ofrecía un sacrificio, una tortuga emergía del rio y comenzaba a caminar alrededor de los oferentes. El Dios del rio ignoraba sus sacrificios hasta que ocurrió que un niño observó la figura curiosa que la tortuga portaba en su caparazón. Entonces, las gentes se dieron cuenta de que el valor del sacrificio debería ser 15".

Realmente la inscripción que la tortuga llevaba en su caparazón era un auténtico *cuadrado mágico* de orden 3 y de constante mágica 15. Se dice que el emperador Yu descubrió las marcas del caparazón hacia el año 2200 a. de C. Le puso el nombre de Lo-Shu, "*libro Shu del rio Lo*" y el cuadrado mágico ha recibido el nombre de "*diagrama Shu del rio Lo*". Parece ser que ese rio era el Rio Amarillo, Hoang-Ho.

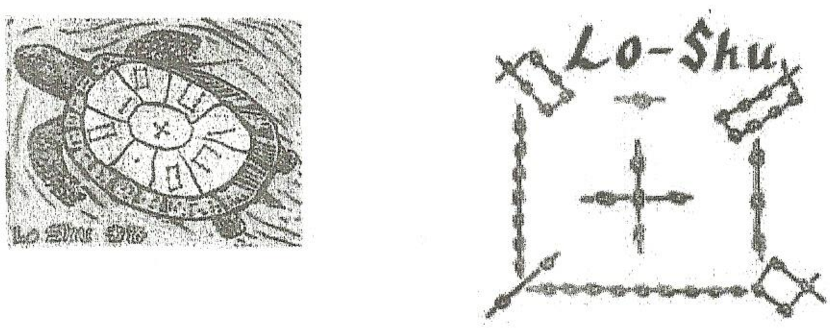


Figura 6. El cuadrado mágico Lo-Shu y su interpretación numérica

Como hemos dicho, en el caparazón de la tortuga, figuras 6 y 7, estaba impreso el cuadrado mágico básico 3 x 3, con S=15 y es equivalente al ya presentado en la figura 1. Este cuadrado se convirtió en la base de la numerología y astrología chinas.

6	**1**	**8**
7	**5**	**3**
2	**9**	**4**

Figura 7. Interpretación numérica del cuadrado mágico Lo-Shu

La imagen de la derecha de la figura 6 proviene de una obra atribuida a Confucio, *I King*, traducida a varios idiomas. Su título en español sería *Libro de las permutaciones.*

Los chinos asignaron a los números de este cuadrado mágico los principios básicos de la vida. El número 5 del centro simboliza la Tierra. En los cuatro lados se representan los elementos principales: los metales (4, 9); el aire (2, 7); el agua (6, 1); la madera (8, 3).

En el siglo IX d. C., apareció en Egipto una tableta de plata con varias marcas de tintura representando un cuadrado mágico. Estas formas fueron interpretadas como un vaticinio de la fortuna.

Los árabes, en el siglo IX, empleaban disposiciones diferentes, dentro de un cuadrado mágico 3 x 3, para designar los elementos platónicos: fuego, agua, tierra y aire. Cada planeta también tenía para ellos un cuadrado mágico asociado que utilizaban en astrología.

Con el tiempo los cuadrados mágicos pasaron a la India. Así, en el templo de Parshvanatha, construido entre 950 y 970 en la localidad de Khajuraho, situada en la región de Bundelkland y antigua capital de la dinastía Chandella, se encuentra el cuadrado mágico de orden 4 construido en el siglo X. En esa localidad se encuentra el mayor conjunto de templos del país, famosos por sus techumbres curvilíneas y sus esculturas eróticas. La Unesco, en 1986, consideró esos templos Patrimonio de la Humanidad.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Figura 8. Templo de Parshvanatha y su cuadrado mágico

En uno de sus pilares, de planta cuadrada, se encuentran gravadas en caracteres indúes y alrededor de dicho pilar las cuatro columnas respectivas del cuadrado mágico citado.

Ese cuadrado está formado por los números 1 al 16 y su suma mágica es S=34. Pero contiene otras particularidades mágicas. Puede observarse que la suma de los elementos de los cuatro cuadrados (de orden 2) de las esquinas, también suman 34:

$$7 + 12 + 2 + 13 = 1 + 14 + 8 + 11 = 16 + 3 + 9 + 6 = 10 + 5 + 15 + 4 = \mathbf{34}$$

También suman 34 los elementos contenidos en el cuadrado central:

34 = 13 + 8 + 3 + 10

Como veremos más adelante, estas últimas propiedades se dan también en otros cuadrados mágicos.

Los cuadrados mágicos fueron introducidos en Europa a principios del siglo XV. Pero, como se ha dicho, ya eran conocidos en siglos anteriores en otros lugares, respondiendo siempre a un carácter empírico por los magos y alquimistas bajo forma de amuleto o talismán. En resumen: la mayor parte de autores que se han ocupado y se ocupan del tema de estos cuadrados admiten como circuito de expansión, China, Grecia, India, Islam.

Los cuadrados mágicos, conocidos con frecuencia como *místicos,* se han empleado de muchas maneras: se escribían sobre el ombligo de la mujer trabajadora; se bordaban en los gorros de los soldados; se colocaban en los edificios para invocar protección; se llevaban en cualquier parte del cuerpo para obtener fuerza o salud. En general, se consideraba que los números dispuestos en un cuadrado con estas características poseían cualidades y poderes mágicos. De ahí su nombre.

El papel de los cuadrados mágicos ha cambiado mucho con el paso del tiempo. Hoy, como ya adelantamos, es uno de los protagonistas dentro de ese otro mundo fascínate que es el de las recreaciones matemáticas o el de hacer matemáticas para el ocio y para divertirse.

La llegada a Europa de textos árabes relacionados con los cuadrados mágicos se hizo a través de España a finales de la Edad Media. Los árabes conocían estos cuadrados con el nombre de *disposición harmoniosa de números.*

CUADRADOS MÁGICOS FAMOSOS

EL CUADRADO MÁGICO *MELANCOLÍA*

Hagamos un recorrido por los cuadrados mágicos históricamente famosos. En el grabado en cobre que el alemán Alberto Durero (1471-1528) hizo en 1514, titulado *Melancolía*, figura 9, dispuso en la parte superior derecha, debajo de una pequeña campana, un cuadrado mágico perfecto de orden 4 cuya constante mágica es S=34. Además, Durero dejó escrito en las dos celdas centrales de la última fila del cuadrado, el año de su realización, 1514, figura 10.

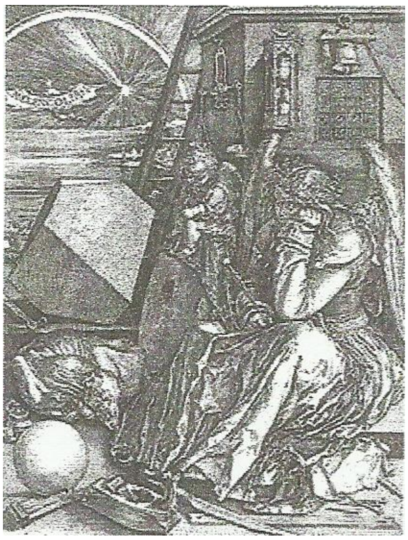
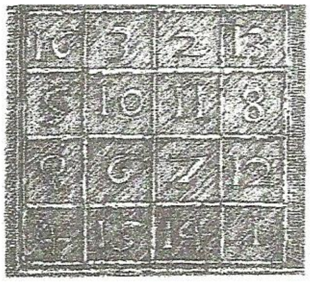


Figura 9. *Melancolía*, grabado de Alberto Durero

Como se ha advertido, en la figuras 9 y 10 se representan el grabado completo y una ampliación del cuadrado mágico contenido en el mismo, al que se ha hecho referencia. Para un mayor detalle y claridad, y para poder hacer cómodamente todas las comprobaciones, se ha añadido en esta última figura los dieciséis números enteros que forman dicho cuadrado.



16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Figura 10. Detalle del grabado de Durero con *S*=34

Este cuadrado contiene otra magia, figura 11, a la que ya hemos hecho mención anteriormente. La suma de los elementos que forman los cuatro cuadrados de las esquinas (rojo y azul) así como el cuadrado central (recuadrado), es también 34:

16+3+5+10 = 2+13+11+8 = 9+6+4+15 =7+12+14+1 = 10+11+6+7 = **34**

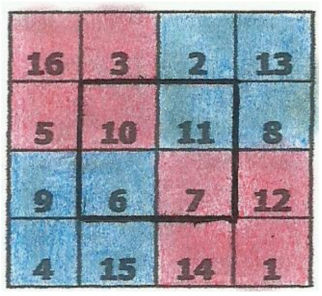


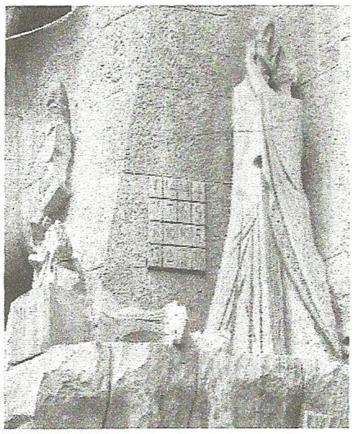
Figura 11. La otra magia de *Melancolía*

Este cuadrado es del tipo *simétrico*. Y recibe este nombre porque cada número sumado a su opuesto situado simétricamente respecto al cuadrado central da como resultado una cantidad fija. Veamos:

16+1 = 3+14 = 2+15 = 13+4 = 8+9 = 12+5 = 10+7 = 11+6 = **17**

EL CUADRADO MÁGICO DE LA SAGRADA FAMILIA

Es celebre también el cuadrado mágico perfecto que obra en una de las fachadas de la Sagrada Familia en Barcelona, figura 12, concretamente en la fachada de la *Pasión* del Templo Expiatorio, fachada diseñada por el escultor, pintor y crítico de arte catalán, Josep María Subirachs (1927-2014). Como puede apreciarse en la figura adjunta (Wikipedia), esa fachada contiene una serie de esculturas relativas a la Pasión de Cristo. Entre otras, el camino al Calvario con la cruz y la propia crucifixión. En la parte inferior izquierda de la misma se sitúa el cuadrado mágico aludido cuya ampliación puede apreciarse en la misma figura acompañado de *El beso de Judas.*



1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

Figura 12. Fachada de la Pasión y cuadrado mágico esculpido

Se trata de un cuadrado de orden 4 y de constante mágica 33, que corresponde a la edad de Cristo. Por las mismas razones que antes, hemos transcrito el contenido de sus diez y seis elementos numéricos. No se sigue aquí la regla general de estar formado por números enteros distintos.

De nuevo, este cuadrado goza también de la misma magia que *Melacolía:*

1+14+11+7 = 14+4+6+9 = 8+10+13+2+= 10+5+3+15 = 7+6+10+10 = **33**

EL CUADRADO MÁGICO DE BENJAMÍN FRANKLIN

Otro cuadrado mágico que se ha convertido en histórico es el de Benjamín Franklin, figura 14. Este cuadrado tiene una serie de propiedades nuevas además de las propias de cualquier cuadrado mágico. Se cuenta que el americano Benjamín Franklin (1706-1790), político, estadista e investigador científico, cuando se aburría en alguna de las reuniones a las que, con frecuencia, tenía que asistir, y para mitigar el hastío, se entretenía resolviendo este tipo de *crucigramas*. Y así debió de inventar el que traemos aquí. Nadie sabe cómo lo construyó.

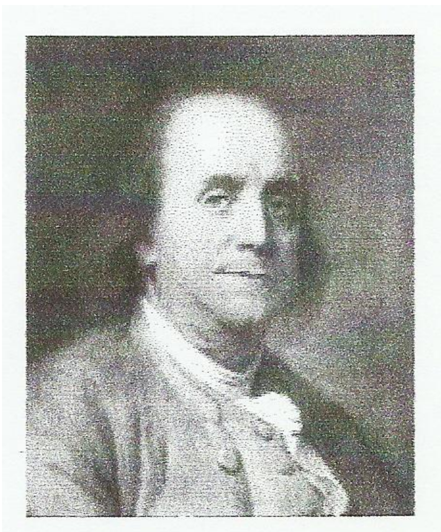


Figura 13. Benjamín Franklin
R. Halley, Museo Histórico de Versalles

La constante semi-mágica de su cuadrado es 260, es decir, la suma de los elementos de las filas y columnas, es 260. Y estas son las características propias y distintivas que lo han hecho famoso.

- Las filas y las columnas de cada uno de sus cuatro cuadrantes suman 130, justo la mitad de su constante mágica, 260. Por ejemplo,

52+61+4+13 = 55+9+50+16 = … = **130**

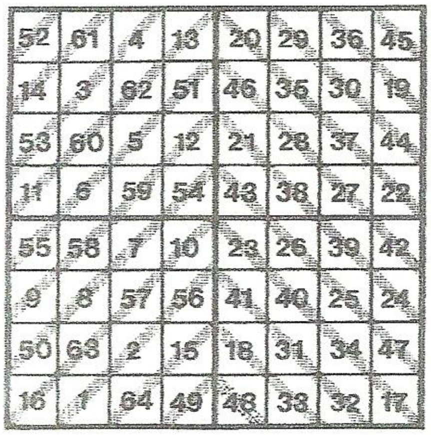
- La suma de los elementos de las diagonales ascendentes y descendentes formadas por cuatro elementos, es también 260. Por ejemplo,

11+60+62+13+20+35+37+22 = **260**

52+3+5+54+43+28+30+45 = **260**

- La suma de cuatro números cualesquiera equidistantes del centro es 130. Tenemos, por ejemplo,

54+43+23+10 = 5+28+40+57 = 52+45+17+16 = … = **130**



52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Figura 14. Cuadrado mágico de Benjamín Franklin

- Como consecuencia de la característica anterior, las cuatro esquinas y los cuatro números del centro también suman 260.

- Por último, la suma de los elementos de cualquier cuadrado 2x2, es 130

EL CUADRADO MÁGICO DE ZURGENA

Zurgena es una localidad de la provincia de Almería de unos 3.000 habitantes situada en el Valle del Almanzora. Entre los años 1874 y 1878 se construye en uno de sus cerros una ermita conocida con el nombre de *Ermita de la Virgen del Calvario* en cuyo altar se encuentra una talla conocida familiarmente como la *Virgencica del Calvario*. Esta ermita sufre una restauración en la década de los noventa del pasado siglo. Para acometer esa restauración, a parte de las donaciones de particulares, se vendió y jugó un número de *Lotería de Navidad*, concretamente el número **54713**, y también a la *Lotería Primitiva*. Recordar que este último juego requiere elegir seis números comprendidos entre el 1 y el 49. En una de las fachadas de la ermita correspondiente a la cúpula, se encuentra un cuadrado mágico realmente curioso, figura 15. Como puede observarse en la misma figura, debajo del cuadrado está grabado el número jugado en la loteria de *Navidad*. El cuadrado mágico contiene todos los números posibles de la *Primitiva.*

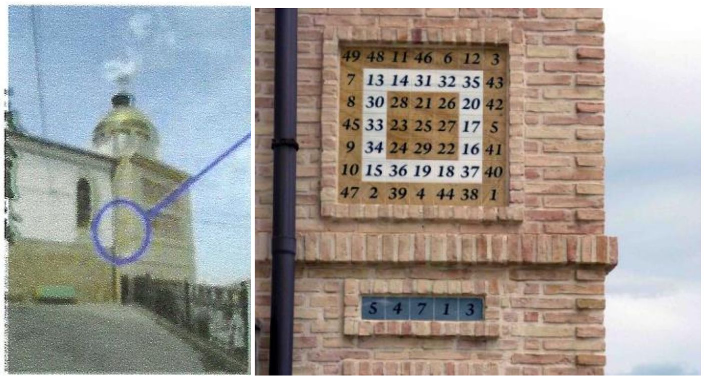


Figura 15. Ermita y cuadrado mágico de Zurgena

Se trata de un cuadrado mágico múltiple. Realmente son tres cuadrados, insertados cada uno dentro de otro. El completo es de orden 7 y le siguen hacia el interior otros dos de ordenes respectivos 5 y 3, figura 16. Estos cuadrados reciben el nombre de *cuadrados en orlas* o *cuadrados orlados.* Se trata, pues, de un cuadrado de orden 7 con tres orlas.

Se parte del cuadrado interior 3x3 de constante mágica *S*=**75**. Éste da lugar al siguiente 5x5 con *S*=**125**. El más completo 7x7 tiene como constante *S*=**175** y está formado, como hemos dicho, por los números 1 al 49. Los veinticinco números del intermedio son los comprendidos entre 13 y 37 y los nueve del interno son, 21, 22, …, 28, 29.

Figura 16. Cuadrados mágicos de Zurgena

Pero este cuadrado contiene una magia sin igual.

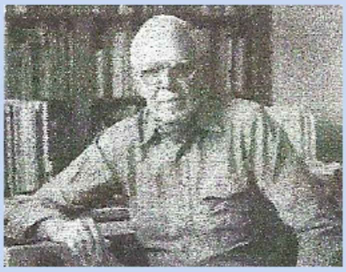
- El número central del cuadrado, el **25**, corresponde a la fecha de la festividad de la Navidad.
- La suma de los veinticuatro números de los cuatro bordes exteriores (en marrón) es **600**.
- La suma de las diez y seis cifras de los siguientes cuatro bordes (en blanco) es **400.**
- La suma de todas las cifras contenidas en el cuadrado interior (en marrón), exceptuando el número central 25, es **200**.
- La suma de los números 46+4+45+5 que forman la cruz más exterior, es **100**.
- La suma de los números 31+19+33+17 que forman la cruz intermedia, es **100**.
- La suma de los números 21+29+23+27 de la cruz interior, es **100**.
- La suma de los números 49+3+1+47 de las cuatro esquinas de los bordes exteriores, es **100**.
- La suma de los números 13+35+37+15 de las siguientes cuatro esquinas, es **100**.
- La suma de los números 28+26+22+24 de las esquinas más interiores, es **100**.

Y en lo referente al número 54713 jugado en la lotería de *Navidad*, puede observarse que la suma de los cuadrados de sus cifras también es 100:

$$5^2 + 4^2 + 7^2 + 1^2 + 3^2 = 25 + 16 + 49 + 1 + 9 = \mathbf{100}$$

Un juego en un cuadrado de Martin Gardner

El famoso Martin Gardner (1914-2010), columnista de *Scientific American*, escritor y filósofo de la ciencia , fallecido a los 95 años de edad, y que nos ha entretenido muchos años con sus innumerables escritos sobre matemática recreativa, inventó un cuadrado, no mágico, con el que pueden pasarse buenos ratos. Es un cuadrado 5x5. También practicó el mismo juego sobre otros cuadrados de distintos órdenes.

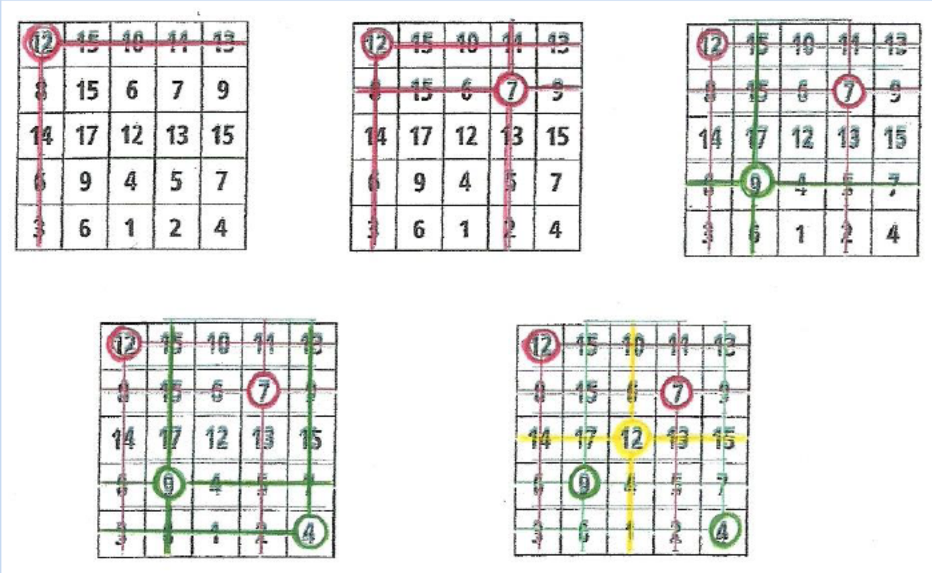


El juego consiste en lo siguiente: se elige un número, un elemento del cuadrado, al azar; se suprime la fila y la columna que se cruzan en la posición de ese número, pero nunca el número elegido. Se toma otro elemento cualquiera de los que aún restan en el cuadrado y de nuevo se suprimen su fila y columna. Se prosigue de esa manera hasta que no pueda elegirse ningún número más.

Vamos a partir del cuadrado 5x5 indicado en la figura siguiente e indicaremos los pasos a seguir utilizando el esquema explicativo que también se adjunta.

12	15	10	11	13
8	15	6	7	9
14	17	12	13	15
6	9	4	5	7
3	6	1	2	4

Elegimos en primer lugar, por ejemplo, el número **12** situado en la esquina superior izquierda y suprimimos la fila y columna donde se encuentra el 12 (marcado en rojo). Ahora tomamos, por ejemplo, el **7** y suprimimos fila y columna correspondientes (rojo). Tomamos a continuación el **9** que aún no ha sido tocado y procedemos con las supresiones correspondientes (verde). Tomamos después el **4**, situado en la esquina inferior derecha, y se hacen las supresiones consiguientes (verde).



Ahora sólo nos queda libre el número **12** situado en el centro del cuadro. Suprimidas fila y columna (amarillo), llegamos al final porque no nos quedan ya más elementos libres.

El resultado de este juego es el siguiente: los números tomados, y en ese orden, son **12**, **7**, **9**, **4** y **12.**

Lo curioso del juego es que la suma de los números tomados (redondeados) en el cuadrado para ir suprimiendo filas y columnas, es la misma cualquiera que sean esos números. Esa suma es, en nuestro caso,

12+7+9+4+12 = **44**

EL PATRÓN DE ÉDOUARD LUCAS

François Édouard Lucas, conocido como Édouard Lucas, nace en la ciudad francesa de Amiens el 4 de abril de 1842, falleciendo en París, de una septicemia, el 3 de octubre de 1891. Hizo sus primeros estudios en la Escuela Normal Superior de su ciudad natal.

Édouard Lucas fue un reconocido matemático. Trabajó en el observatorio de París junto con Le-verrier y más tarde ejerció la docencia en los liceos parisinos de San Luis y de Carlomagno. Es famoso por sus trabajos acerca de la sucesión de Fibonacci y por el estudio sobre los números de Mersenne. También se le recuerda como inventor de numerosos juegos matemáticos recreativos como las Torres de Hanoi. En este ámbito es famosa su publicación *Récréations mathématiques*, 1882-1884.

Éduard Lucas consigue una fórmula o patrón con la que se puede construir cualquier cuadrado mágico de orden tres. Este es el esquema:

a+b	**a-b-c**	**a+c**
a-b+c	**a**	**a+b-c**
a-c	**a+b+c**	**a-b**

Figura 17. Cuadrado mágico general de Lucas

Dando valores enteros cualesquiera a las letras que lo componen, puede obtenerse el cuadrado mágico de orden 3 que se desee. Puede comprobarse fácilmente que su constante mágica es **3a**: esa es la suma de los elementos de sus filas, columnas o diagonales. Asignando los siguientes valores enteros **a**=83, **b**=1 y **c**=-1, resulta el siguiente cuadrado mágico con *S*=249, figura 18.

84	**85**	**80**
79	**83**	**87**
86	**81**	**82**

Figura 18. Un cuadrado mágico de Lucas con *S*=249

Es curioso observar que en todo cuadrado mágico construido con el patrón de Lucas, los números colocados en las cuatro líneas, fila, columna y dos diagonales, que pasan por el elemento central **a**, forman cuatro sucesiones en progresión aritmética: 79, 83, 87, de razón 4; 85, 83, 81, de razón el valor negativo -2; 84, 83, 82, de razón -1; 80, 83, 86, de razón 3.

El cuadrado está formado, en este caso, por los números enteros consecutivos 79, 80, 81, …, 86, 87.

EL PATRÓN DE JÁNOS BOLYAI

El húngaro János Bolyai (1802-1860) fue, ante todo, un geómetra revolucionario que, al igual que el ruso Lobachevski, consideró que el postulado de la paralela de Euclides, *por un punto exterior a una recta pasa sólo una paralela a la misma*, no era toda la geometría. Bolyai creó una geometría no euclídea, la *hiperbólica*, en la que *por un punto exterior a una recta pasan dos paralelas a esa recta*. Véase, *János Bolyai, El Geómetra Revolucionario*, García Merayo, Nivola, Madrid, 2009.

Bolyai también trabajó sobre otros campos de la matemática como las congruencias, la ecuación de Pell, los números de Fermat o la divisibilidad en el campo de los números complejos. Y también nos dejó un patrón para construir cuadrados mágicos como el que se muestra a continuación.

x	**y**	**3b-x-y**
4b-2x-y	**b**	**2x+y-2b**
x+y-b	**2b-y**	**2b-x**

Figura 19. Cuadrado mágico general de János Bolyai

Como ya sucedía con el cuadrado de Lucas, en este caso bastará con dar valores enteros a las letras o variables **b**, **x** e **y** para obtener los cuadrado mágicos de orden tres correspondientes. Puede observarse que su constante mágica es **3b**.

Asignando los valores enteros **b**=25, **x**=20 e **y**=33 en el patrón de Bolyai, obtendremos el siguiente cuadro mágico cuya constante mágica es ***S***=**3b**=3x25=75:

20	**33**	**22**
27	**25**	**23**
28	**17**	**30**

Figura 19. Un cuadrado mágico de Bolyai con *S*=75

EL CUADRADO SATOR

Trataremos ahora de un cuadrado que no es mágico conforme a la definición dada. Vamos a presentar una estructura alfabética que ocupa, eso sí, la estructura de un cuadrado mágico: se trata del *cuadrado SATOR*, formado por las cuatro palabras SATOR, AREPO, TENET, OPERA y ROTAS. Si nos fijamos en la figura 20, las cinco palabras presentan una curiosa palindromía, es decir, son palabras que se leen igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha o de arriba hacia abajo o al contrario. Por ejemplo, SATOR, de la primera línea, leída de izquierda a derecha da el mismo resultado que, en la quinta línea, leída de derecha a izquierda.

Este cuadrado *mágico* se ha encontrado en muchos lugares del continente europeo: en 1925 aparece en las excavaciones de Pompeya el que se considera como el más antiguo, concretamente en una incisión hecha en una de la columnas del *gran gimnasio*; en las ruinas romanas de Cirencester, en Inglaterra; en Oppède, población francesa del departamento de Vaucluse, región Provenza-Costa Azul; en una pared de la catedral de Siena; en Santiago de Compostela. Y en muchos lugares más, como en paredes de ermitas y monasterios, sobre todo templarios.

Merece la pena citar dos lugares de Italia donde han aparecido sendos *SATOR* muy particulares. En la Abadía cisterciense de Valvisciolo situada en la provincia italiana de Latina, Italia Central, cercana a la ciudad medieval de Sermoneta, se encuentra un cuadrado cuyas cinco palabras están dispuestas en *forma radial*. En la Colegiata de Sant'Orso, templo románico, en Aosta, muy cerca de los Alpes italianos apareció, al lado del presbiterio, en unas excavaciones arqueológicas llevadas a cabo en 1999, un mosaico conteniendo un *SATOR* pero esta vez con sus palabras en *forma circular*.

El interés por este cuadrado ha aumentado al ser sujeto de una película del año 2020 de título *Tenet*, producción inglesa y estadounidense, cuyo director y guionista fue Christopher Nolan.

El cuadrado de la izquierda de la figura 20 es precisamente el encontrado en Oppède. En la misma figura puede verse una reproducción en caracteres más legibles así como el cuadrado *SATOR* en una puerta de madera localizada en la ciudad francesa de Grenoble. En el centro del cuadrado, la palabra TENET, en color rojo, en horizontal y vertical, forma una cruz griega.

Figura 20. Cuadrado SATOR

Vamos a hacer una descripción del contenido de este cuadrado misterioso. Analizaremos, en primer lugar, el posible significado de sus cuatro palabras.

- ✓ **SATOR**. Es un sustantivo latino del género masculino de significados posibles (según Columella), *sembrador*, *cultivador, plantador* o también, *fundador*, *criador*, *padre* o *progenitor*. Pertenece a la segunda declinación latina, *sator,-oris*.

- ✓ **TENET**. Es la tercera persona del indicativo del verbo latino de la segunda conjugación, teneo, tenes, tenere, tenui, tantum, cuyos significados son, *tener, gozar, poseer, ser dueño, guardar, conservar, mantener.* En este caso puede significar, *tiene, posee, mantiene,….*

- ✓ **OPERA**. Sustantivo latino femenino perteneciente a la primera declinación, *opera, -ae*. Significados: *obra, operación* (según Cicerón), *trabajo, empleo, servicio* o bien (según Q. Horacio), *operador, trabajador, obrero.* Tiene conexión con *opus, -eris*, también de la segunda declinación: *obra, industria, ocupación, acción con esfuerzo.*

- ✓ **ROTA**. Sustantivo latino femenino perteneciente a la primera declinación, *rota, -ae*, cuyos significados son, *rueda, rotación*. Tiene conexión con el verbo latino de la primera conjugación, roto, -as, -are, -aui, -atum, que significa, *rodar, girar, dar vueltas*.[1]

[1] Diccionario Latino-Español, Valbuena Reformado, Edición 16ª, Madrid, 1878.

- ✓ **AREPO**. Se trata de una palabra, la más enigmática de las cinco, de significado desconocido. Según la mayoría de los estudiosos de este cuadrado, podría tener un origen egipcio y referirse a un nombre propio o, incluso, ser un nombre inventado. El historiador francés Jérôme Carcopino (1881-1970) opina que procede de una palabra celta equivalente a *arado*; David Daube (1909-1999), experto en leyes bíblicas y romanas, piensa que es una versión hebrea o aramea del griego Αλφα ω, es decir, *Alfa-Omega*, de los cristianos primitivos. Esto dice el Apocalipsis de san Juan, C1, V8: *Yo soy el alfa y la omega, dice el Señor Dios, el que es, y será, el Todopoderoso.* Finalmente, el filólogo serbio-estadounidense, Miroslav Marcovich (1919-2001), opina que se corresponde con el nombre griego Harpócrates con el que se conocía al dios egipcio Horpajered. En Alejandría se correspondía con el dios Horus, dios del sol naciente, del sol del amanecer o del sol del invierno y de la renovación constante.

Hecho el análisis lingüístico por separado de las cinco palabras componentes de *SATOR*, escribiremos ahora alguna de las interpretaciones del conjunto dando por sentado que su verdadero significado aún está por aclarar debido a las distintas acepciones que cada una de sus palabras tiene.

- El granjero Arepo tiene *(como)* ruedas *(un arado)*.
- El agricultor utiliza su arado como forma de trabajo.
- El granjero Arepo sostiene las ruedas con dificultad.
- El sembrador Arepo guía con destreza las ruedas.
- Suficiente poder (energía) para orar y para trabajar a diario -> *Ora et labora*.

Terminaremos con la interpretación que a lo largo de los siglos ha hecho del contenido de este cuadrado, el mundo cristiano. El primero en proponer la tesis del Apocalipsis fue el alemán Félix Grosser. Ya presentamos esta misma opinión debida a D. Daube. La presencia de este cuadrado, como ya hemos advertido, en muchas iglesias medievales nos conduce a pensar que *SATOR* era un símbolo introducido en la cultura cristiana. Entonces, el citado *sembrador* deberíamos identificarlo con el *Creador*, lo que nos conduciría a hacer la siguiente interpretación: "El Creador, autor de todas las cosas, mantiene con destreza sus propias obras" o "El sembrador-de lo que testifico-sostiene por su fuerza soberana todo el universo".

Oliver Perret von Hooff sostiene que la datación de este cuadrado es casi contemporánea a la elaboración del Apocalipsis de Juan (66-67), es decir, de los años 60-65. Y finalizamos con las siguientes frases de Oliver Perret[2]:

> *Concluiremos con lo esencial: según nosotros, este cuadrado transmite por primera vez en la historia de la humanidad el mensaje del Evangelio escrito en latín y, además, de forma muy condensada, incluyendo también todo el bagaje cultural griego y hebraico de la época. Es el único mensaje de la buena noticia-en latín-que conozcamos, surgiendo-directamente o por primera vez-de la parte occidental del Imperio Romano, a principio de la segunda mitad del primer siglo de nuestra era.*

[2] Tomado del blog de Oliver Perret van Hooff.

CUADRADOS DIABÓLICOS

Entre todos los cuadrados mágicos existe un cierto número de ellos que recibe el apellido de *diabólico*: sus filas, sus columnas y *todas* sus diagonales, son mágicas, es decir, suman lo mismo. El cuadrado mágico del templo de Parshvanatha, ya considerado, pertenece a esta clase. En la figura 21 proponemos uno de estos cuadrados diabólicos de constante mágica ***S***=65.

Si seccionamos este cuadrado en dos partes mediante un corte entre dos filas y se permutan ambas partes, el cuadrado que resulta sigue siendo mágico. Lo mismo ocurre si el corte se hace entre dos columnas. Por consiguiente, es diabólico.

1	**20**	**9**	**23**	**12**
24	**13**	**2**	**16**	**10**
17	**6**	**25**	**14**	**3**
15	**4**	**18**	**7**	**21**
8	**22**	**11**	**5**	**19**

Figura 21. Cuadrado mágico diabólico, *S*=65

Apreciaremos mejor esta característica definitoria si trabajamos sobre el cuadrado de la figura 22, (de Émile Fourrey).

Partamos del cuadrado mágico de la izquierda. Se ha hecho en él un corte vertical entre las columnas cuarta y quinta y después se han transpuesto esas dos partes resultando el cuadrado de la derecha que sigue teniendo la constante mágica *S*=65, como puede comprobarse fácilmente.

11	20	24	3	7
4	8	12	16	25
17	21	5	9	13
10	14	18	22	1
23	2	6	15	19

7	11	20	24	3
25	4	8	12	16
13	17	21	5	9
1	10	14	18	22
19	23	2	6	15

Figura 22. Cuadrado mágico diabólico, *S*=65

Esa constante se mantiene al inspeccionar todas sus diagonales aunque no sean las principales. Observando una vez más el cuadrado de la izquierda y siguiendo las diagonales punteadas que contienen en total cinco elementos, diagonales complementarias, obtenemos:

4+21+18+15+7 = **65**

O también:

24+8+17+1+15 = **65**

Además, los diez elementos de los cuatro triángulos formados sobre las dos diagonales, principal y secundaria, suman lo mismo, 130. Veamos:

11+20+4+24+8+17+3+12+21+10 = **130**

19+1+15+13+22+6+25+9+18+2 = **130**

7+3+25+24+16+13+20+12+9+1 = **130**

23+10+2+17+14+6+4+21+18+15 = **130**

CUADRADO MÁGICO APOCALÍPTICO

Se trata de un cuadrado, conocido como *apocalíptico*, que encierra en su cuadrícula fantásticas propiedades numéricas. Vamos, en primer lugar, a acercarnos a la Biblia, Nuevo Testamento, y concretamente al libro de las *Revelaciones* o del *Apocalipsis* de san Juan, capítulo 13, titulado *Las dos fieras*, versículo 18. Leemos al final de ese capítulo: *¡Aquí del talento! El perspicaz que calcule el número de la fiera; es número de una persona y equivale a 666.*

Se trata de un capítulo abigarrado de una confusa simbología animal: bestias, leopardos, cuernos,… Significa una denuncia del mal que Juan está padeciendo en Patmos, isla situada en el mar Egeo, perteneciente al archipiélago Dodecaneso. Esas fieras representan el anticristo o el imperio romano que persigue y mata a los cristianos. Escribe de la primera fiera: *Vi salir del mar una fiera con diez cuernos y siete cabezas*. Y de la segunda: *Vi subir de la tierra otra fiera con dos cuernos como de cordero, que hablaba como un dragón.* Esta segunda fiera ejercía autoridad sobre la primera.

El capítulo acaba con una llamada a la reflexión sapiencial. Según las reglas de la *gematría*, la cifra 666, escrita en caracteres hebreos, da como resultado esta frase: *Nerón César*. Con ello se alude a que el poder demoníaco de la fiera se encarnó en Nerón, perseguidor de los cristianos. Pero como la cifra no llega a ser 777, significa que la persecución será parcial y transitoria. En cualquier caso, el número de la Bestia 666 se ha relacionado con Satanás y con el Anticristo.

La *gematría* es un método de interpretación de nombres, palabras o frases hebreas que se basa en la asignación de un valor numérico a cada carácter del alfabeto hebreo.

En Patmos existe una *gruta* llamada del *Apocalipsis* que marca el lugar en el que se supone que Juan de Patmos, que estaba desterrado allí, recibió las visiones en las que basó el libro aludido. Fue el escriba Prócoro quien redactó las palabras de Juan a medida que éste tenía las visiones.

3	107	5	131	109	311
7	331	193	11	83	41
103	53	71	89	151	199
113	61	97	197	167	31
367	13	173	59	17	37
73	101	127	179	139	47

Figura 23. Cuadrado mágico *Apocalítico*

En la figura 23 adjunta podemos ver el cuadrado que nos ocupa. Como puede observarse, la suma de los elementos de columnas, filas y diagonales principal y secundaria es 666. Pero pueden observarse otras propiedades interesantes.

- Todas las cantidades que figuran en el cuadrado son números primos.

- Este cuadrado también recibe el nombre genérico de *pandiagonal* porque sumando los elementos de ciertas diagonales con sus complementarias, hasta reunir seis elementos del cuadrado, también obtenemos 666. Ejemplos:

$$7+107+127+59+167+199 = \mathbf{666}$$
$$103+331+5+179+17+31 = \mathbf{666}$$
$$367+101+5+11+151+31 = \mathbf{666}$$

El número de la Bestia goza de unas particularidades que no dejan de ser curiosas. Escribimos dos de ellas:

$$\mathbf{666} = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2$$

$$\mathbf{666} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 5^3 + 4^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3$$

CUADRADO MÁGICO TIBETANO

Presentamos ahora un cuadrado mágico de orden 3 de procedencia tibetana. Está grabado en el centro de un sello aparecido en aquellos horizontes. Es otro ejemplo ilustrativo de que las ideas matemáticas no se ven nunca limitadas por fronteras o por culturas.

Una vez más, se trata de un cuadrado básico 3x3 cuyo contenido ya se ha mencionado. Está reproducido, de nuevo, en la figura 30. Este cuadrado mágico figura impreso en el círculo central del sello reproducido en la misma figura.

4	**9**	**2**
3	**5**	**7**
8	**1**	**6**

Figura 30. Sello tibetano y su cuadrado mágico

CUADRADOS ALFAMÁGICOS

Los cuadrados alfamágicos corresponden a un tipo de cuadrados mágicos en los cuales las cantidades numéricas se escriben por su propio nombre empleando caracteres alfabéticos de un determinado idioma. De ahí su nombre. Además, el total de letras que componen cada cifra dan lugar también a otro cuadrado mágico. El primero de ellos fue publicado en 1994 por el inglés Lee Sallows, ingeniero electrónico y experto en el uso y juego de números con palabras y, en general, de matemáticas recreativas. Sallows vive desde 1970 en Holanda, Nijmegen.

Veamos, en primer lugar, figura 31, un cuadrado alfamágico en español.

ciento veintiuno	**ciento cincuenta y cinco**	**noventa y tres**
noventa y cinco	**ciento veintitres**	**ciento cincuenta y uno**
ciento cincuenta y tres	**noventa y uno**	**ciento veinticinco**

Figura 31. Cuadrado alfamágico en castellano

A este cuadrado le corresponde el siguiente cuadrado mágico numérico, figura 32, cuya constante mágica es S=369. El contenido de cada casilla es el resultado de sustituir las cantidades alfabéticas por sus correspondientes numéricas.

121	**155**	**93**
95	**123**	**151**
153	**91**	**125**

Figura 32. Cuadrado mágico con *S*=369

Y si ahora se calcula el número de letras de cada casilla del cuadrado alfamágico, Figura 23, se obtiene el siguiente cuadrado mágico:

15	**21**	**12**
13	**16**	**19**
20	**11**	**17**

Figura 33. Cuadrado mágico con *S*=48

Veamos ahora el cuadrado alfamágico de Lee Sallows al que se ha aludido al principio. Sus palabras están escritas en inglés. En figuras sucesivas podrá comprobarse su formación que es análoga al cuadrado alfamágico en español. Sus constantes mágicas respectivas, como puede apreciarse, son **45** y **21**.

five	twenty two	eighteen
twenty eight	fifteen	two
twelve	eight	twenty five

5	**22**	**18**
28	**15**	**2**
12	**8**	**25**

4	**9**	**8**
11	**7**	**3**
6	**5**	**10**

Figura 34. Cuadrado alfamágico de Lee Sallows y sus sucesivos.

Curiosamente puede apreciarse que este último cuadrado está constituido por la sucesión numérica 3, 4, 5, …, 10, 11. Además, observando sus dos constantes mágicas respectivas, **45** y **21,** y puestas en inglés, da como resultado *forty five* y *twenty one*. Y si hallamos ahora el total de sus letras, obtenemos en ambos casos **9**, que corresponde a 3x3, producto de los órdenes de ambos cuadrados. Realmente, se trata de un conjunto de curiosidades entrelazadas.

MÉTODOS PARA CONSTRUIR CUADRADOS MÁGICOS

En adelante vamos a dar algunas reglas para poder construir nuestros propios cuadrados mágicos. Lo que no vamos a hacer es exponer una teoría general, teoría que puede encontrarse en libros especializados como los *referenciados*.

La primera regla para la construcción de cuadrados mágicos aparece en el siglo XIV. Se debe a un monje y matemático griego, además de comentarista y gramático, que vivió hacia 1392, llamado Miguel Moschopoulos. Entre sus obras se encuentra precisamente un tratado de matemática recreativa sobre los cuadrados mágicos. En 1894, el investigador francés Arnoux, perteneciente a la Sociedad Matemática Francesa, además de oficial de la Marina, nos traza el verdadero y novedoso camino a seguir para la obtención de tales cuadrados. En cualquier caso, aún hoy se sigue investigando para añadir métodos generales a los ya conseguidos para la formación de cuadrados mágicos de orden par de cualquier tamaño. No ocurre lo mismo cuando el orden es impar; en este caso, sí puede decirse que los métodos existentes son muchos, consolidados y variados.

UN CUADRADO DE ORDEN IMPAR

Comenzaremos con una regla para construir un cuadrado mágico de orden impar, concretamente de orden 5, con números sucesivos 1, 2, …., 25. Aplicaremos el método debido al francés Claude-Gaspar Bachet de Méziriac (1581-1638), también conocido como *método de las pirámides.*

Para ello, y observando la figura 35, seguiremos los pasos siguientes:

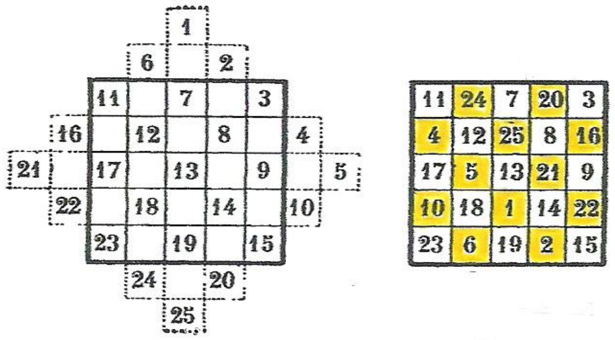


Figura 35. Método de las pirámides.

- Sobre los cuatro laterales de la retícula 5x5 de la figura de la izquierda se construyen unas pirámides o escaleras (marcadas con líneas de puntos) que vamos a denominar *celdas virtuales* o *auxiliares.*

- Comenzando por el vértice de una cualquiera de las pirámides (hemos comenzando por el vértice superior) se colocan en diagonales descendentes los sucesivos números componentes del cuadrado mágico, 1, 2, 3, …, 25.

- Si observamos ahora el cuadrado de la derecha de la figura 35, vemos que los números que han quedado dentro de la retícula de la izquierda permanecen en sus mismos lugares (en negro) en el cuadrado de la derecha.

- Los elementos situados en las celdas virtuales de las cuatro pirámides se trasladan al interior del cuadrado (sombreados en amarillo), de la siguiente manera: cada uno se desplazará 5 celdas (orden del cuadrado mágico) hacia abajo, hacia la izquierda, hacia arriba o hacia la derecha, según convenga. Por ejemplo, el 1 ha descendido cinco lugares; el 5 se ha movido cinco lugares hacia la izquierda; el 21 se mueve hacia la derecha y así sucesivamente hasta quedar todos ellos dentro del cuadrado mágico definitivo.

Dependiendo de donde comencemos a situar los números y del sentido que tengan las diagonales, obtendremos cuadrados mágicos diferentes pero todos ellos con la misma constante mágica: *S*=**65** = ½ [5(5^2+1)].

CUADRADO DE ORDEN PAR Y DIVISIBLE POR CUATRO

Daremos ahora reglas para la construcción de cuadrados mágicos de orden par, orden divisible o no por cuatro. Comenzaremos por el primer caso: orden divisible por cuatro.

En primer lugar, supongamos la siguiente sucesión que contiene un número par, *ocho*, (y divisible por 4) de elementos consecutivos:

1 2 3 4 5 6 7 8

A elementos como el **1** y el **8** o el **2** y el **7**, etcétera, que distan lo mismo de los números extremos, los llamaremos *complementarios.* Además, la suma de esos pares de números siempre da el mismo resultado, **9**.

Sabido esto, construyamos ahora un cuadrado mágico de *orden cuatro* siguiendo el método de La Hire. Apliquemos la teoría anterior a la sucesión de *cuatro* elementos, **1**, **2**, **3** y **4**, cuyas parejas complementarias son, **1** y **4** , **2** y **3** que en ambos casos suman **5**. Dispondremos, en primer lugar, de tres cuadrados como se indica en la figura 36. Estas son las reglas a seguir.

2	4	1	3
3	1	4	2
3	1	4	2
2	4	1	3

+

12	0	0	12
4	8	8	4
8	4	4	8
0	12	12	0

▷

14	4	1	15
7	9	12	6
11	5	8	10
2	16	13	3

Figura 36. Orden par y divisible por cuatro.

- Situar en la primera línea del primer cuadrado la sucesión de los cuatro elementos dichos, en cualquier orden, pero de tal manera que cada dos se sitúen en celdas tales que sean complementarias: 2+3=4+1=5.

- La segunda línea es igual a la primera pero con sus elementos en orden invertido.

- Las dos filas restantes son el resultado de hacer una simetría con las dos anteriores, es decir, la tercera igual a la segunda y la cuarta igual a la primera.

De esta manera hemos conseguido formar el cuadrado de la izquierda de la figura 36 que, como puede comprobarse, es mágico con S=10.

Hemos de hacer aquí una observación. Si el orden del cuadrado que deseamos construir fuera múltiplo de 4 pero superior a 4, como 8, 12, 16, …, entonces la última de las reglas escritas se convertiría en la siguiente:

- La tercera fila es igual a la primera, la cuarta igual a la segunda, y así sucesivamente hasta que se hayan llenado la mitad de las líneas. A partir de ahí, las filas siguientes son una simetría de la anteriores.

Sigamos adelante con la regla de La Hire no sin antes hacer un comentario previo. Como el orden es 4, consideramos la progresión aritmética siguiente de cuatro elementos:

0 4 8 12

Apoyándonos en ella, aplicaremos los pasos siguientes:

- Formaremos otro cuadrado (el central de la figura 36), que también será mágico, introduciendo en su primera columna los cuatro números anteriores en el orden que se quiera pero de tal forma que sus elementos residan en celdas complementarias: 12+0=4+8=12.

- La segunda columna es la anterior pero invertida. La tercera, igual a la segunda y la cuarta, igual a la primera.

- El cuadrado mágico definitivo se forma sumando, elemento a elemento, los dos cuadrados anteriores.

CUADRADO DE ORDEN PAR Y NO DIVISIBLE POR CUATRO

Finalizaremos este trabajo exponiendo otra regla de La Hire para construir cuadrados mágicos de orden par pero no múltiplo de cuatro. Por ejemplo, la aplicaremos para construir un cuadrado mágico de orden seis, como el de la figura 37.

- ❖ La primera fila del cuadrado I contiene los números 1, 2, 3,…, 6, en cualquier orden pero colocados de forma complementaria; la segunda fila es igual a la primera pero con el orden invertido; la tercera, es la segunda pero con el orden invertido con lo que se reproduce la primera; las filas cuarta, quinta y sexta, son una simetría de las tres primeras. Como puede observarse, este cuadrado no es mágico.

Trabajando de forma similar a como se hizo en el caso primero anterior, y dado que el cuadrado es de orden 6, nos apoyaremos ahora en la progresión aritmética de *seis* elementos:

0 6 12 18 24 30

- ❖ Para construir el cuadrado II, introduciremos en la primera columna los elementos de la progresión anterior obedeciendo las normas de la complementación. La segunda columna es la inversa de la primera; la tercera, la inversa de la segunda. La cuarta, quinta y sexta columnas son una simetría de las tres primeras. El cuadrado II resultante tampoco es mágico.

- ❖ Sumando elemento a elemento los cuadrados I y II, obtenemos el III, que aún no es el definitivo puesto que tampoco es mágico.

Para la construcción de los cuadrados IV y V, figura 37, conservaremos en ambos el contenido de las dos diagonales del anterior III.

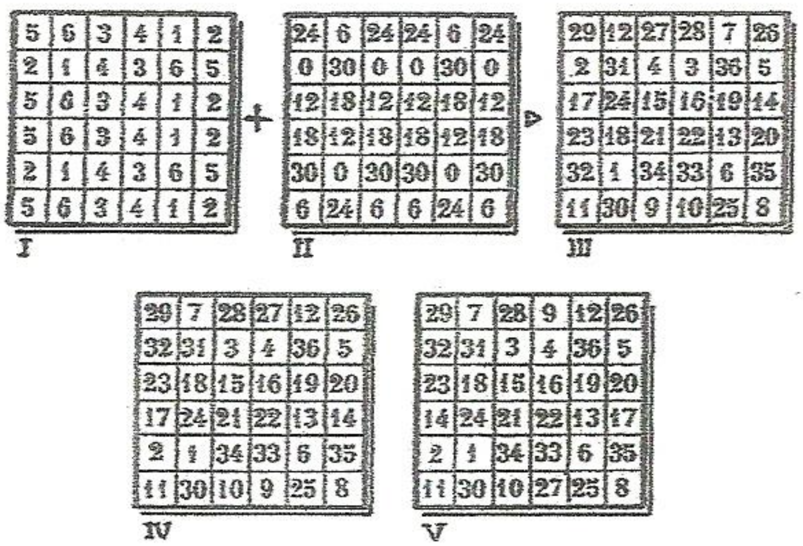


Figura 37. Orden par y no divisible por cuatro.

- ❖ El cuadrado IV se consigue del III intercambiando, en la primera fila, los elementos 12 y 7, 27 y 28; en la primera columna, los 2 y 32, 17 y 23. En la segunda y últimas líneas, los 4 y 3, 9 y 10; en la segunda y últimas columnas, 24 y 18, 14 y 20.

- Para obtener el cuadrado mágico definitivo V, se intercambian los extremos de la cuarta fila y de la cuarta columna de IV, es decir, 17 y 14, 27 y 9. Este cuadrado tiene una constante mágica que vale **111**=½[6(6^2+1)].

Existe toda una variedad de recintos mágicos. Entre ellos, los *cubos* y *círculos mágicos*, las *estrellas mágicas* e incluso M. Arnoux se introduce en la teoría de los *cuadrados hipermágicos*. Pero todas esas variedades no formaban parte de este artículo. En una próxima colaboración hablaremos de ellos e incluso también de los *cuadrados latinos*.

REFERENCIAS

Alonso Schökel, Luis, *Biblia del Peregrino*, Editorial SalTerrae, Mensajero, 2011.

Benson, William y Jacoby, Oswald, *Magic Cubes: new recreations*. Dover, 1982.

Crilly, Tony, *50 Mathematical Ideas*, Quercus Publishing, Londres, 2007.

Descombes, René, *Les Carrés Magiques*, Libraire Vuibert, París, 2000.

García Merayo, Félix, *El Reino de los Números*, Creaciones Copyright, Madrid, 2010.

García Merayo, Félix, *Viaje por la Matemática Discreta*, Creaciones Copyright, Madrid, 2011.

Gardner, Martin, *More mathematical puzzles and diversions*, Penguin Books, UK, 1967.

Gardner, Martin, *Nuevos pasatiempos matemáticos*, Alianza Editorial, Madrid, 1972.

Gardner, Martin, *Carnaval Matemático*, Alianza Editorial, Madrid, 1981.

Fourrey, Émile, *Récréations Arithmétiques,* Libraire Vuibert, París, 2001.

Herscovici, Armand, *La spirale de l'escargot*, Éditions du Seuil, París, 2000.

Pappas, Theoni, *The Magic of Mathematics*, Wide World Publishing/Tetra, USA, 2006.

Publicación periódica TANGENTE, *Fascinants Carrés Magiques*, nº 196, Éditions Pole, París, 2020.

Rittaud, Benoît, *Les nombres extraordinaries*, Éditons Le Pommier, París, 2009.

Sallows, Lee, *Alphamagic Squares,* public. de The Mathematical Association of America, 1994.

Stewart, Ian, *L'univers des nombres*, BELIN pour la Science, París, 2000.

Warusfel, André, *Les nombres et leurs mystères,* Éditions du Seuil, París, 1961.

Wikipedia, la enciclopedia libre.

Zurdo, David, *La gematría, numerología hebrea*, Manual formativo de ACTA, nº 48, 2008.