La ciencia del espacio

Julián Sanz Pascual
cuartadim@yahoo.es

El espacio constituye una de las nociones básicas de la geometría, por no decir que es la fundamental; sin embargo, aunque esto resulte chocante, se trata de una ciencia que hoy está en mantillas; es más, acaso sea más propio decir que en ella aún no se ha entrado a fondo.

1. La era del espacio

Después del enunciado que acabamos de hacer, nos encontramos con el hecho innegable de que estamos en la era del espacio, lo que parece un contrasentido. En efecto, desde hace más de cinco décadas, todos estamos asistiendo asombrados a la carrera espacial cuyo primer éxito fue el lanzamiento del Sputnik I por los soviéticos en 1957. Entonces lo absurdo sería que fuésemos capaces de conquistar el espacio sin tener previamente una ciencia del espacio. Sin embargo, realmente es así. Lo que ocurre es que no solemos diferenciar el espacio físico del espacio geométrico. Lo que ocurre también es que en la conquista del espacio físico hemos podido ir avanzando, cierto, pero no de manera espacial, sino planar. Así, la Tierra es un punto, la Luna otro, el Sol otro, y así todos los cuerpos celestes, lo que nos permite hacer con sus distancias y ángulos figuras geométricas en el plano, lo que nos permite a su vez hacer en la geometría del plano los cálculos necesarios para hacer los viajes. Y nosotros aquí, cuando hablamos de la ciencia del espacio, nos referimos al espacio geométrico.

2. De Pitágoras a Euclides: del objeto al método Descartes

En la historia de las matemáticas, Pitágoras y Euclides constituyen dos hitos, pero no tanto por los descubrimientos concretos que aportaron, como por la particular filosofía que cada uno imprimieron en esta ciencia. La matemática pitagórica se caracteriza por el predominio del objeto sobre el método, mientras que en la euclídea es el método el que trata de imponerse. Se puede decir que estas dos posturas científicas fundamentales son las que han marcado la historia de las matemáticas, las que la siguen marcando hasta hoy mismo.

Sin entrar en la larga historia de esta ciencia, tanto en la Edad Antigua como en la Media, se puede decir que ha sido ya en la Moderna cuando se han echado los argumentos para que estas dos corrientes se separen, por no decir para que se enfrenten; sin embargo, bien se puede decir que la que se ha alzado con el santo y la peana, al menos hasta ahora, ha sido el método. Sin duda el gran paladín del método ha sido Descartes (1596-1650), quien en la IV de sus *Reglas para la dirección del espíritu*, dice:

"entiendo por método, reglas ciertas y fáciles, cuya rigurosa observación impide que jamás se suponga verdadero lo falso y hace que la inteligencia, sin gasto inútil de esfuerzo, sino aumentando siempre la ciencia, llegue al verdadero conocimiento de todo lo que es capaz" (A. T. 372)

Es decir, que el objeto no cuenta para nada en el proceso de conocer, sino que basta con que vayamos armados de un perfecto método para que todas las verdades se nos rindan sin necesidad de recurrir a la intuición. Nos referimos a la intuición tal como la ciencia la ha solido entender: como una especie de luz natural, más o menos instantánea, que nos permite comprender de golpe una cosa, descubrir de pronto una nueva verdad sin que sea derivada de otra, que es lo que realmente nos conduce al progreso, aunque con el riesgo de algún que otro morrón. Porque otra cosa es la intuición tal como la propone el propio Descartes:

"Entiendo por intuición no la confianza incierta que proporcionan los sentidos ni el juicio engañoso de una imaginación que realiza mal las composiciones, sino un concepto que forma la inteligencia pura y atenta con tanta facilidad y distinción que no queda ninguna duda sobre lo que entendemos, o, lo que es lo mismo: un concepto que forma la inteligencia pura y atenta sin ninguna duda y que nace sólo de la luz de la razón y que, por ser más simple, es más cierta que la misma deducción" (A. T. 368)

Para resumir, lo que el pensador francés entiende por intuición no es otra cosa que cada uno de los pasos de la deducción, lo que la hace más cierta que la misma deducción por ser más simple. Con esta intuición es imposible el error, sin embargo por este camino bien poco lejos podemos llegar.

3. El teorema de Fermat

Sin duda que el golpe de gracia para acabar con la clásica intuición como fuente de certeza en las matemáticas se lo debemos a Pierre Fermat (1601-1665), de manera especial con su célebre teorema. Las matemáticas, la geometría especialmente, hasta ese momento habían vivido más o menos satisfechas con el teorema de Pitágoras o de los tres cuadrados, que se da en el plano. Esto las había permitido culminar en la geometría analítica, que tiene en ese teorema el punto de apoyo fundamental, pensando además que en esa geometría se podía dar razón de todos los puntos del espacio, lo que es falso. Al menos lo es en lo que se refiere a la ecuación de cuatro cubos, la del espacio que vamos a proponer aquí, que no hay manera de encajar en la geometría analítica.

Mas volviendo a la ciencia del espacio, conviene anotar que ya los árabes en el siglo XI se habían planteado la ecuación de tres cubos, lo que suponía en el fondo un intento de saltar del plano al espacio, de las relaciones cuadráticas, que se han de dar en el plano, a las relaciones cúbicas, que ya se han de dar en el espacio. Se trataba de un problema famoso que el médico y gran sabio Avicena cita en un tratado de filosofía[1]. Pero la ecuación de tres cubos era conocida como insoluble con números racionales, lo que quería decir que por ella era imposible salir del plano y saltar al espacio.

Fue Fermat el que, llevado sin duda por sus afanes de investigación sobre los números, volvió a la ecuación de tres cubos y, al saber ya que no tenía soluciones, buscó una salida para su ciencia. Dos eran las que se le ofrecían: una horizontal y otra vertical. La horizontal consistía en añadir un cubo más, mientras que la vertical suponía subir de grado. Y optó por la segunda, que no era ninguna salida, sino más bien una encerrona, pues se trata de un enunciado negativo. Él había demostrado, aunque sólo fuese parcialmente, que esta ecuación en el cuarto grado no tiene soluciones, y no dudó en lanzarse al estrellato generalizando en su célebre enunciado:

"No hay tres números enteros tales que $x^n = y^n + z^n$, siendo *n* entero mayor de 2"

[1] Ver: CATHERINE GOLDSTEIN, "El teorema de Fermat", en Rev. *Mundo científico*, Mayo 1994, p. 419.

La historia de este teorema es muy conocida entre los matemáticos más punteros, pues ha durado más de tres siglos y medio, y a él se han dedicado las mentes más brillantes. Hasta que en 1995, según parece, el matemático inglés Andrew Wiles lo ha demostrado. Ahora bien, tal demostración, como no podía ser de otra manera en un enunciado negativo sobre una realidad infinita, ha tenido que recurrir al método de reducción al absurdo, el que puede servir para enriquecer el método, de ninguna manera nos alumbra para que conozcamos más sobre el objeto. En la *Lógica de Port-Royal*, lo dicen de esta manera:

"tales demostraciones (por reducción al absurdo) pueden convencer al espíritu, pero también es claro que no ilustran al espíritu"[2].

Lo que nos interesa señalar aquí es que por este camino aún no se ha entrado en la ciencia del espacio geométrico, no se ha encontrado la puerta, antes al contrario, lo que se ha hecho ha sido cerrarlas todas para poder llegar al objeto.

4. La geometría proyectiva

Un capítulo especial en lo que se refiere a la ciencia del espacio es el de la geometría proyectiva. Morris Kline, dice de ella:

"La belleza de los conceptos, la perfección lógica de su estructura y su papel fundamental en la geometría hacen recomendable el tema a todos los estudiantes de matemáticas. La fascinación de la geometría proyectiva se extiende incluso hasta sus mismos orígenes históricos en el trabajo de los artistas del Renacimiento[3].

En efecto, el estudio de los artistas plásticos del Renacimiento en la pintura constituye uno de los capítulos más fascinantes de la geometría. Ellos lo que hicieron fue pasar de las pinturas planas o en dos dimensiones de los artistas del medioevo a la pintura espacial o en tres dimensiones. La dificultad estaba, por supuesto, en el hecho de que los lienzos o las tablas eran planos. Entonces hubieron de recurrir a la perspectiva de la realidad, que no se nos da en un solo plano, sino en varios sucesivos, que se van haciendo de menores dimensiones a medida que se alejan de nosotros. Fig. 1.

Los problemas que esto plantea se han tratado de resolver mediante la geometría proyectiva, que tiene muchas dificultades en las que aquí no podemos entrar. Sin embargo sí voy a citar al menos uno de los teoremas más sorprendentes, el de Desargues, que se puede enunciar así:

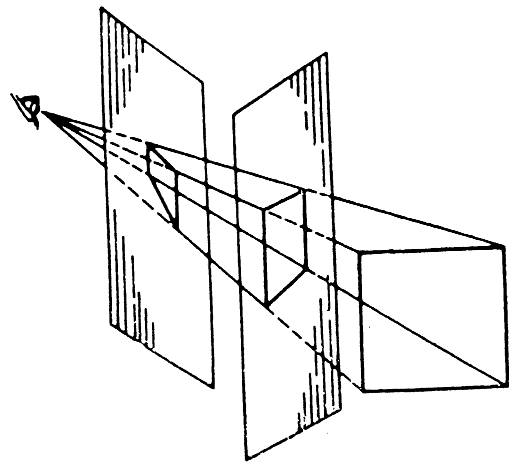

Figura 1.

"Si a un tetraedro lo cortamos por un plano que no sea paralelo a la base, si prolongamos los lados que forman los triángulos tanto de la base como del plano que corta, estas prolongaciones se cortan en tres puntos que además están en línea recta" Fig. 2.

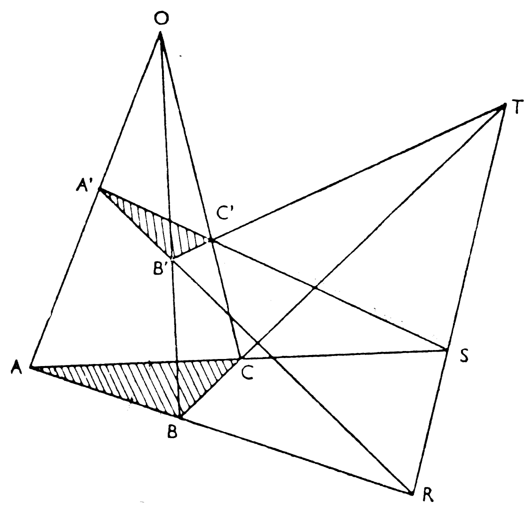

Figura 2.

Se trata en el fondo de un hecho extraño o al menos sorprendente, una proyección del espacio que se nos ofrece en el plano, que es donde únicamente lo podemos dibujar.

---

[2] ANTOINE ARBAULD y PIERRE NICOLE, *La lógica o El arte de pensar (Lógica de Port-Royal)*, Alfaguara, Madrid 1987, p. 457.
[3] MORRIS KLINE, "Geometría proyectiva", en SIGMA, tomo IV, p. 216.

5. Las geometrías no euclídeas

Fue ya en el siglo XIX, en la primera mitad, cuando las matemáticas, acaso sin tener clara conciencia de ello, dieron un golpe de timón nuevo para entrar en el espacio, aunque, como vamos a ver, no lo hicieron de manera legítima; tampoco lo hicieron a fondo, sino que se quedaron en la superficie. Me refiero a las geometrías no-ecuclídeas, cuya historia arranca del célebre V postulado de Euclides. Los postulados son éstos:

1.º Dos puntos determinan una sola recta.

2.º Una línea recta se extiende indefinidamente en cualquier dirección.

3.º Es posible dibujar una circunferencia de centro y radio dados.

4.º Todos los ángulos rectos son iguales.

5.º Dada una línea *l* y un punto *p* no perteneciente a esa línea, existe en el plano de *p* y de *l*, una y sólo una línea que, pasando por *p*, nunca se encuentre con la línea *l*.

Me parece que se trata de enunciados que cualquier persona con un poco de sentido geométrico acepta sin ninguna reserva, incluso el V, que se puede simplificar y quedar así:

"Por un punto exterior a una recta sólo se puede trazar una paralela".

También podía quedar así:

"En un plano, todos los puntos que equidistan de una recta pertenecen a dos paralelas a esa recta, una a cada lado de ella"

Se trata de un enunciado tan sencillo como fácil de comprender y de aceptar, pues intuitivamente basta con trazar una recta *l* en el plano, un punto *p* exterior a ella; trazar después una perpendicular a la recta *l* desde el punto *p*, y a continuación una perpendicular por el punto *p* al segmento trazado. Nos encontramos con cuatro ángulos rectos cuyos lados libres siempre estarán a la misma distancia de la recta original. Fig. 3.

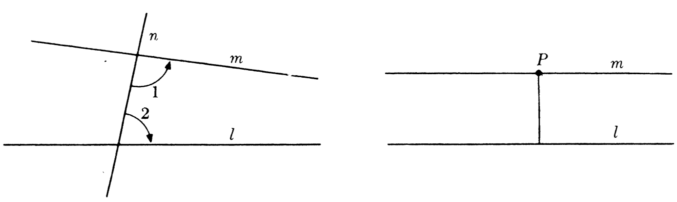

Figura 3.

Pero la matemática formalista en su búsqueda del rigor más absoluto rechaza esta clase de demostraciones porque, según ella, dependen de la intuición de los sentidos, lo que no la hace aceptable, pues, como es bien sabido, los sentidos con frecuencia nos engañan. Se trata, sin embargo, de un argumento falaz, pues la intuición no la hacemos sobre los dibujos físicos a los que aplicamos la vista, sino sobre las figuras ideales a las que llegamos con la imaginación. Ya Platón anotó el hecho cuando decía que los geómetras no hacen sus razonamientos sobre los dibujos que tienen delante, sino sobre las figuras ideales de las que esos dibujos son representación. Henri Poincaré (1854-1912) dijo lo mismo en otros términos:

"La geometría es el arte de las demostraciones bien hechos sobre dibujos mal hechos"

Yo añadiría otro argumento más sencillo aún: los invidentes absolutos son capaces de entender y aceptar este V postulado, lo que no puede nacer de la visión física, sino de una intuición mental o intelectual, que pueden hacer poniendo en juego la imaginación. Es que además, si no pensamos así, desde el momento en que utilicemos dibujos para razonar, nos estamos cargando toda la geometría como ciencia con valor universal y necesario, pues sus enunciados, si los hacemos depender de alguna clase de experiencia, serían particulares y contingentes. Las matemáticas entonces dejarían de ser una ciencia formal y *exacta* para convertirse en una ciencia empírica y *aproximativa*, sin otro valor que el estadístico al igual que las ciencias de la naturaleza que nacen de un referente físico sobre el que se aplican los sentidos.

Ahora bien, ¿el hecho de que las matemáticas sean una ciencia formal quiere decir que todas sus proposiciones se puedan deducir de otras anteriores, lo que la convertiría en una gigantesca tautología? De pensar así, a partir del punto, por ejemplo, de manera exclusivamente analítica, podríamos construir toda la geometría, lo que es falso. En efecto, sin otra noción que la puntual, que sería la pura inextensión, no podemos construir ni el más corto segmento rectilíneo. Por millones y trillones de puntos que juntemos, no obtendremos ni la más insignificante longitud. Es más, sin aceptar algo que no sea puntual, todos los puntos serían el mismo; es más aún, ni siquiera nos los podríamos imaginar, pues no estarían en parte alguna. Por tanto, pasar analíticamente del punto al segmento sería imposible, pues nada puede dar lo que no tiene, *longitud* en este caso. El segmento rectilíneo sería la relación lineal más corta ente dos puntos. Mas para que esta relación lineal sea comprensible es necesario aceptar que entre punto y punto haya algo que no sea puntual, siendo además necesario añadir nociones no puntuales como "relación lineal", "más", "corta", "entre" y "dos", una por cada palabra.

Lo mismo podemos decir para pasar del segmento al plano y del plano al espacio. La conclusión general es que la geometría no se puede construir de manera *analítica* de abajo a arriba, sino que para ir ascendiendo de nivel es necesario recurrir a la *síntesis*. En efecto, el espacio tiene propiedades que no se las da el plano, el plano tiene propiedades que no se las da el segmento y el segmento tiene propiedades que no se las da el punto. De abajo a arriba procedemos mediante la *intuición* o la *síntesis*, de arriba abajo podemos proceder mediante la *deducción* o el *análisis*.

En lo que respecta a los cinco primeros postulados de Euclides, se puede decir algo similar: el V podía implicar a los otros cuatro, pero no a la inversa. Según las leyes de la implicación, si aceptamos el V, hemos de aceptar los cuatro anteriores (modo *ponendo ponens*), pero la inversa es un sofisma. Lo que sí es cierto es que, si negamos los cuatro anteriores, hay que negar el V (modo *tollendo tollens*).

Pero aún yo añadiría dos nuevas razones que ponen en cuestión los argumentos de las geometrías no-euclídeas:

1ª. El V postulado se cumple en el plano no sólo cuando las líneas son rectas, sino en toda clase de líneas. El mejor ejemplo práctico lo podemos encontrar en las vías del ferrocarril: trazada una vía, por un punto exterior a ella, es decir, a una determinada distancia fija, sólo hay otra vía posible.

2ª. El V postulado se cumple también en cualquier superficie que no sea plana. El más comprensible ejemplo lo tenemos en la esfera. Basta fijarnos en cualquier paralelo de la esfera terrestre: por un punto exterior a ese paralelo, sólo uno y único paralelo podemos trazar. Fig. 4.

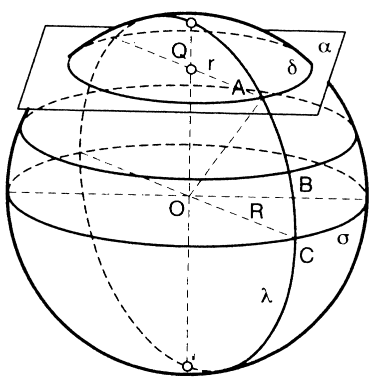

Figura 4.

Por todo esto, yo no soy capaz de entender, como pretenden las geometrías no euclídeas, que en un plano que sea algo curvo, es decir, cuando no sea plano, sino una simple superficie, se pueden trazar infinitas paralelas en el caso de que la curvatura sea exterior y ninguna paralela en el caso de que la curvatura sea interior. Esto sería posible en el caso de que ese punto exterior a la recta fuese también exterior a la superficie en que está dibujada la propia recta. Pero es que además, si esa recta exterior a la original y al plano en que está dibujada se curva igualmente, la línea resultante sería paralela.

En conclusión, las geometrías no euclídeas, al curvar el plano, quieran o no, ya están en el espacio, al menos en la superficie del espacio, pues una superficie no plana necesita como mínimo cuatro puntos no en el mismo plano para ser determinada, y con estos cuatro puntos ya estamos en el espacio, insisto, aunque sólo sea en su superficie, que es en la que las geometrías no euclídeas se han movido y en la que han propuesto la extraña idea de que el espacio pudiera curvar los objetos que se meten en él, que es donde se habrían de curvar los planos. Es lo que pretendió demostrar empíricamente Federico Gauss (1777-1855) construyendo un triángulo de grandes dimensiones mediante tres rayos luminosos proyectados desde tres montes. Si el espacio curvaba a estos rayos, el triángulo formado tendría sus ángulos más o menos abiertos según el sentido de la curvatura. Los resultados fueron decepcionantes, pues vio que los tres ángulos del triángulo en cuestión sumaban dos rectos.

6. La cuarta dimensión permite ya entrar en el espacio real

Que no se haya entrado en la ciencia plena del espacio geométrico, también lo podemos llamar real o limitado, no quiere decir que no se sepa nada de él, pues entre otras cosas se sabe hallar el volumen de los cuerpos geométricos más diversos, desde un cubo hasta un toro, lo que exige tener en cuenta la naturaleza de esos espacios. Sin embargo la ciencia general del espacio, la que exige una ecuación sobre la que fundamentar todos sus teoremas y fórmulas, las que nos permitan el dominio científico y general que necesitamos, ésta no puede de ser otra que la de los cuatro cubos, que sería algo análogo a la de tres cuadrados con respecto al plano. Por supuesto que la del espacio ha de estar constituida por relaciones cúbicas, que son las que corresponden a su verdadera naturaleza, y además han de ser cuatro y no tres, pues cuatro y no tres como mínimo son los puntos no en el mismo plano que determinan un espacio. En el plano, la figura más simple es el triángulo, mientras que en el espacio el poliedro más simple es el tetraedro.

7. Teorema de los cuatro cubos

Suponemos que el espacio es algo real, lo que quiere decir que las fórmulas que nos permitan entrar en él con naturalidad han de proceder de su propia naturaleza. Lo mismo ocurre con el plano, que también suponemos que es algo real, lo que exige que las fórmulas que nos permitan entrar en él con naturalidad procedan igualmente de su propia naturaleza. En el plano, esta fórmula es la de tres cuadrados, el celebérrimo teorema de Pitágoras. Es la fórmula básica que nos permite establecer una ecuación que relaciona tres puntos no en línea recta. Estas relaciones no pueden ser lineales o de primer grado, sino que han de ser cuadráticas o de segundo. Con relaciones de primer grado solamente podemos establecer *inecuaciones*: en un triángulo, un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia. En cambio, con relaciones de segundo grado, podemos establecer igualdades, *ecuaciones*, que son las que nos han permitido entrar con naturalidad en la ciencia del plano y llegar muy lejos: $x^2 + y^2 = z^2$.

En el espacio, la ecuación fundamental ha de tener cuatro incógnitas como mínimo, y sus relaciones han de ser cúbicas. Esta ecuación no puede ser otra que la de cuatro cubos, que propiamente no debería llamarse teorema, sino simplemente ecuación, en el sentido de que no está deducida de otra, sino que es un simple hecho con el que un día este autor se encontró. En efecto, a partir del teorema de Fermat, tratando de dar salida al hecho de que la ecuación de tres cubos no tenía soluciones, por las razones ya apuntadas, se me ocurrió poner una incógnita más. Y por simple tanteo, comenzando por los números más bajos, a la tercera encontré la solución: $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. No se trata, pues, de un teorema, pues no es una proposición deducida de otra, tampoco de un axioma, pues no comprendemos que haya de ser así por absoluta necesidad, menos aún de un modesto postulado, sino de un simple hecho, de una verdad matemática que yo he encontrado, lo mismo que Arquímedes encontró el célebre principio físico que lleva su nombre. Y al ser un hecho, no se trata de algo que yo he producido, sino de algo que estaba ahí, lo mismo que está el Monte Everest, por citar una comparación muy feliz que pone Roger Penrose en un sentido más general, el de que los entes matemáticos, aunque no tengan materialidad, sí tienen realidad[4].

Hay que reconocer, sin embargo, que en el caso que nos ocupa, el método matemático me ha ofrecido los instrumentos que me han permitido acceder a ese hecho, a esa verdad: los signos numéricos, tanto en las bases como en los exponentes, también los signos aritméticos que me permiten establecer la relación. Pero esos no son más que unos instrumentos, de ninguna manera son el hecho, que es algo independiente de ellos, aunque reconociendo que se trata de unos instrumentos muy eficaces por su sencillez, y sin los cuales no me hubiese sido posible detectarlo.

Lo que sorprende es que unas soluciones tan sencillas como las que yo he encontrado no las hayan buscado los matemáticos más ilustres, comenzando por el propio Fermat. Un gran aficionado a los números como él era, por simple tanteo, hubiese encontrado fácilmente estas soluciones, 3, 4, 5 y 6, lo que le hubiese liberado de tener que enunciar el famoso teorema que ha tenido en vilo a la comunidad científica durante más de tres siglos y medio. Yo he llegado a pensar que él conoció estas soluciones y se las cayó. ¿Por qué? Porque una solución tan sencilla le estropeaba el *invento*, el de un teorema que, como la historia ha demostrado, podía dar mucho de sí. También he llegado a pensar que ésa pudo ser la prueba que, según él, no pudo poner por falta de espacio en los márgenes de la Aritmética de Diofanto en que dejó escrito su teorema.

Más extraño es que Leonardo Euler en el siglo XVIII tratase la ecuación de cuatro cubos y no reparase en estas cuatro soluciones tan fáciles de encontrar. Hay que remontarse al siglo XX con un matemático tan poco convencional como Ramanujan para encontrar la primera fórmula que da muchas soluciones para la ecuación de cuatro cubos, pero además lo sorprendente es que las bases de esa fórmula o de esas fórmulas, que son cuatro, una para cada incógnita, tengan como coeficientes estos cuatro números: 3, 4, 5 y 6. He aquí las fórmulas:

$$x = 3a^2 + 5ab - 5b^2$$
$$y = 4a^2 - 4ab + 6b^2$$
$$z = 5a^2 - 5ab - 3b^2$$
$$t = 6a^2 - 4ab + 4b^2$$

Otros matemáticos se han ocupado de la ecuación de cuatro cubos, pero ninguno de los que yo he estudiado parten de estas cuatro soluciones. Salvo yo mismo, que he ideado unas fórmulas que dan soluciones como éstas: $7^3 + 14^3 + 17^3 = 20^3$. Lo sor-

[4] ROGER PENROSE, *La nueva mente del emperador*, Mondadori, Madrid 1991[3], p. 132.

prendente es que jugando con estas cuatro soluciones llegué un día a esta ecuación: $1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2$, que se puede generalizar a todos los números y quedar enunciada así:

"La suma de los cubos de la sucesión de los números enteros es igual al cuadrado de su suma"

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3... = (1 + 2 + 3 + 4 + 5...)^2$$

Se trata nada menos que del viejo teorema de Nicómaco de Gerasa (s. I). La diferencia está en que este autor llegó a su teorema por caminos distintos, habiéndonos quedado esta su representación geométrica en el plano[5]. Fig. 5.

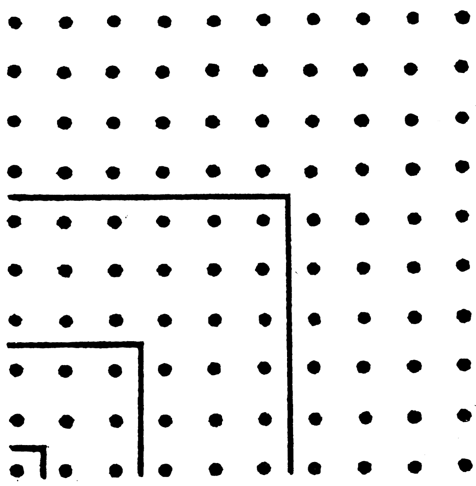

Figura 5.

Entonces nos encontramos con una conexión entre el teorema aritmético, el de Nicómaco de Gerasa, y un hecho que se da en el plano. También con una conexión de este teorema con la ecuación de cuatro cubos que yo he propuesto, al menos con unas determinadas soluciones que se dan en el espacio. Lo que es el salto de la aritmética a la geometría o a la inversa.

8. El salto a la geometría

La ecuación de cuatro cubos se quedaría en una simple curiosidad, como me ha dicho más de un matemático profesional, si con ella no nos echamos al espacio, por no decir al monte, para ver lo que podemos descubrir en él. Y esto es lo que yo he hecho y publicado en revistas y en libros, partiendo del supuesto de que la ecuación de cuatro cubos es la expresión aritmética del espacio más simple, el tetraedro[6]. De todo esto sólo voy a recordar aquí que pensando en cuatro dimensiones y no en tres como tradicionalmente nos han enseñado, sin otros instrumentos que un compás, una regla y unos folios, sin ninguna clase de calculadora, combinando desarrollos aritméticos y geométricos, he conseguido algo tan espectacular como solucionar una ecuación de hasta quince cubos por ahora:

$$96^3 = 78^3 + 66^3 + 42^3 + 25^3 + 24^3 + 18^3 +$$
$$+ 17^3 + 15^3 + 14^3 + 12^3 + 7^3 + 5^3 + 4^3 + 3^3$$

Estamos ya en la ciencia del espacio real, una ciencia que, a pesar de los avances de todos lo saberes, aún está en mantillas, lo que quiere decir que está pidiendo a gritos matemáticos profesionales que sean capaces de desarrollarla, que con sus potentes técnicas puedan echar una mano a este modesto aficionado que soy yo.

9. El esfericentro

Si yo preguntase a cualquier matemático qué es el esfericentro, sin duda me contestaría que es el centro de la esfera. Sin embargo si le pido que me busque un diccionario o un libro de matemáticas en que aparezca ese término, no lo va a encontrar. Al menos a mí no me ha sido posible encontrarlo. En cambio si le pido que me busque el término circuncentro sí lo va a encontrar. ¿Qué significa esto? Pues que del circuncentro sí se ha ocupado la geometría y sabe como se halla en un triángulo. Sin embargo del esfericentro nunca se ha ocupado, que sería el punto que equidista de los cuatro vértices de un tetraedro, lo mismo que el circuncentro es el punto que equidista de los tres vértices de un triángulo. Desde el circuncentro, con un compás, podemos trazar la circunferencia circunscrita a un triángulo cualquiera; desde el esfericentro podemos "trazar" la esfera en la que está inscrito un tetraedro cualquiera. Teóricamente es muy fácil hallar el esfericentro de un tetraedro: sería el punto donde se cortan las cuatro perpendiculares a cada una de las cuatro caras por sus respectivos cincuncentros. El problema es dibujarlo sobre un plano, pues ya nos encontramos con las específicas dificultades de la geometría proyectiva.

---

[5] Ver: GERHARD FREY, *La matematización de nuestro universo*, G. Del Toro, Editor, Madrid 1978, p. 14.
[6] Ver: JULIÁN SANZ PASCUAL, "La cuarta dimensión", en *Manual formativo de ACTA,* n.º 9, pp. 69-76.
Del mismo autor: *La cuarta dimensión, una alternativa al teorema de Fermat (Nueva filosofía de las matemáticas)*, Edición del autor, Segovia, 2002, 162 páginas.

10. La ciencia del espacio y los físicos

Ante estas dificultades de los matemáticos para encontrar la realidad del espacio, la que les permitiría entrar en su verdadera naturaleza geométrica, en su verdadera ciencia, han sido los físicos los que han venido a echarles una mano suponiendo que el espacio no sólo tiene realidad, sino que ha de tener alguna materialidad, la que han denominado "materia oscura". A ella hemos dedicado un artículo en esta misma revista[7].

[7] Ver: JULIÁN SANZ PASCUAL, "Las matemáticas y el lenguaje. La materia oscura", en *Manual formativo de ACTA*, n.º 50, pp. 99-106.