El espacio tiene dimensión tres

Víctor Arenzana Hernández
vicarenz@yahoo.es

1. Introducción

Este escrito tiene la intención de aclarar a los lectores no matemáticos de la Revista de Acta que, después de leer el artículo de Julián Sanz Pascual, *Nueva filosofía de las matemáticas*, puedan pensar que la dimensión matemática tiene poco que ver con la percepción de dimensión que intuitivamente nos proporciona el sentido común.

El concepto de dimensión ya apareció en la geometría griega, la cual distinguía entre problemas lineales, planos y sólidos, esto es, entre problemas de dimensiones uno dos y tres. Cuando en el siglo XVI se resolvieron las ecuaciones algebraicas, el concepto de dimensión, aparecido la geometría griega, se tradujo sin alteración al lenguaje algebraico. Con x se representaba la medida de una longitud, con x^2 la medida del área de un cuadrado de lado x y con x^3 el volumen de un cubo de lado x. Esta traslación se reflejó en el significado que los primeros algebristas dieron a los coeficientes de las ecuaciones algebraicas. Los coeficientes debían tener unidades de medida lineales, cuadradas o cúbicas con el fin de conservar la homogeneidad en las ecuaciones que se planteaban. La traducción de los problemas de la geometría al álgebra impedía sumar longitudes con superficies, ni éstas con volúmenes. Así, en la ecuación,

$$x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = 0,$$

que representaba una suma de cuatro magnitudes, se tenía que si x era una longitud, x^3 sería un volumen. Para que la suma representada por los términos de la ecuación fuera de magnitudes homogéneas $b\,x^2$ debía ser un volumen y, por consiguiente, b debería ser lineal. Para que $c\,x$ fuera volumen c debería ser la medida de una superficie y, por la misma razón, el coeficiente *d* debería representar la medida de un volumen. Para los griegos no tendría significado geométrico una ecuación algebraica de cuarto grado, pero las ecuaciones de cuarto grado fueron resueltas en el siglo XVI por Ludovico Ferrari (1522-1565) y este descubrimiento supuso un triunfo del lenguaje algebraico que abriría nuevas perspectivas a las matemáticas y al concepto de dimensión.

El concepto de dimensión griego pasó primero a la matemática clásica y después a la matemática de los siglos XVII y XVIII. Pero la noción de dimensión se generalizó debido, en buena medida, al desarrollo de los cálculos algebraicos. De esta forma, las nuevas matemáticas, que admitían geometrías de dimensión mayor que tres, se aplicaron al estudio de la física, de la química, de la economía y a otras ciencias experimentales. A este desarrollo contribuyeron grandes matemáticos como B.Riemann (1826.1866), G. Cantor (1845-1918), R. Dedekind (1831-1916), y F. Haussdorff (1868-1942) entre otros.

La dimensión matemática es un concepto que los matemáticos han estudiado desde muchos puntos de vista y le han dedicado muchos trabajos y cavilaciones porque no es una noción baladí que se pueda modificar, redefinir o sustituir por otra que sólo guarde con ella alguna relación de analogía. No se puede afirmar que el plano tenga dimensión tres o que el espacio posea dimensión cuatro sin tratar de ajustar estas afirmaciones a la teoría matemática, puesto que la noción de dimensión no se puede aislar del resto de las teorías matemáticas. No es posible realizar tal o cual afirmación por una observación, que, interpretada de determinada forma, no encaje con la matemática establecida.

Un ejemplo curioso en el que la interpretación inadecuada de una fórmula correcta puede inducir errores es el siguiente:

a) Al tratar de resolver la ecuación de los tres cubos: $a^3 + b^3 = c^3$, cuyas incógnitas son *a*, *b*, *c*, con *a*, *b*, *c* números enteros se encuentra de manera natural, que, aunque esa ecuación no tenía solución con la condición exigida, se cumplía, sin embargo, la relación numérica $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$, ecuación que puede denominar de los cuatro cubos[1].

b) Enseguida se puede observar que los tres sumandos del primer miembro de la identidad anterior verifican la relación cuadrática $3^2 + 4^2 = 5^2$. Que denominaremos ecuación de los tres cuadrados.

c) Las igualdades $3^2 + 4^2 = 5^2$ y $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ eran conocidas por los matemáticos de todos los tiempos, pero se podría inferir de la primera igualdad la siguiente consecuencia: *La ecuación de los tres cuadrados es la ecuación del plano, pues tres como mínimo son los puntos no en la misma recta que determinan un plano*. Y concluir que el plano tiene dimensión tres. Con este mismo argumento se puede comprender que, con la segunda igualdad, llega a la conclusión que el espacio tiene dimensión cuatro

Los resultados en los que se basa la argumentación son particularizaciones de dos resultados matemáticos. La ecuación $a^2 + b^2 = c^2$ tiene infinitas soluciones enteras y los valores $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ son una solución particular que verifica: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Lo mismo podemos decir de la ecuación $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$ que tiene infinitas soluciones enteras y los valores a=3, b=4, c=5, d=6 son una solución particular de la misma, ya que se verifica: $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. Esta última ecuación cúbica fue resuelta por el matemático indio S. Ramanujan (1887-1920). Resulta evidente que el punto de partida de la argumentación lo forman dos particularizaciones de ecuaciones que han surgido de las matemáticas y tienen cabida dentro de las matemáticas. Lo que resulta fantasioso es la interpretación de las mismas. Esa interpretación puede permitirnos relacionar los números enteros con algunos puntos del plano o del espacio, pero no autoriza a sacarse de la manga un concepto de dimensión brumoso que no coincide con el concepto de dimensión, perfectamente definido y estudiado en las matemáticas. Para llegar a esta conclusión se ha utilizado un razonamiento por analogía, que en matemáticas se utiliza, a veces, para establecer conjeturas, pero nunca para obtener resultados fiables que puedan formar parte del cuerpo de las matemáticas. Para formular la conjetura de que las fórmulas aritméticas tienen que ver con el concepto de dimensión matemática se debe conocer dicho concepto y las dificultades que ha habido para establecerlo. De otro modo, la conclusión está en la más pura línea de la numerología Pitagórica, en la cual los números podían informarnos de la estructura del Universo, ser garantes de la armonía terrenal,

[1] La ecuación $a^n + b^n = c^n$ es una ecuación clásica de la que Pierre Fermat (1601-65) conjeturó el siguiente teorema (conocido como el último teorema de Fermat, recientemente demostrado por Wiles). Si *n* es un entero mayor o igual que tres entonces no existen números enteros *a, b* y *c* (excepto la solución trivial *a*=0, *b*=0 y *c*=0) que cumpla la igualdad $a^n + b^n = c^n$. Lo que supone que la ecuación $a^3 + b^3 = c^3$ no tiene solución.

cifrar la música de las esferas celestiales, ser los crípticos testigos del pasado o marcadores de las pautas del porvenir de los seres humanos y de las civilizaciones.

A veces la idea de dimensión mayor que tres despierta la imaginación y hace brotar los pensamientos más fantasiosos y se asocia con ideas propias del ilusionismo y del espiritismo, que concebían la cuarta dimensión como el lugar en el que se ocultaban de nuestros ojos los espíritus, los fantasmas y las ánimas de nuestros antepasados. A dar testimonio de este delirio no se han resistido ni los matemáticos más eminentes. El propio Julio Rey Pastor (1888-1962) describió, en una de las conferencias[2] que pronunció en el Ateneo de Madrid en 1915, una anécdota curiosa sobre lo crédulos que pueden resultar algunos científicos con este concepto fantasioso de la cuarta dimensión. En esa conferencia decía:

"De intento hemos pasado por alto el número de dimensiones del espacio físico, problema extraño a la matemática. Omitimos, en consecuencia, las diversas razones de índole filosófica, matemática, química etc, que se han aducido para probar la existencia de un espacio cuadridimensional: El argumento de los poliedros simétricos, el del átomo plurivalente, etc. Pero citaremos siquiera las curiosas teorías del astrónomo Zöllner, profesor de la Universidad de Leipzig hacia el año 1870"

Rey Pastor siguió explicando en esa conferencia la opinión del astrofísico alemán Frederick Zöllner,(1834-1882), el cual, maravillado por los experimentos del mago espiritista Slate, ideó una curiosa teoría para explicar los fenómenos de desapariciones que realizaba Slate en sus espectáculos. Como parece que Zöllner no veía explicación a esos maravillosos experimentos y estimó que las escamoteos del hábil prestidigitador se producían porque el desaparecido se ocultaba en una cuarta dimensión a la que el común de las personas no tenía acceso.

Esta idea fue recogida por Edwin A. Abbott (1838-1926) en su obra *Flatland* (1884) en la que describía cómo se podría manifestar la existencia de los seres del espacio a unos seres que vivieran en un mundo plano como la superficie de una mesa. Para unos habitantes de *planilandia* una esfera puede desaparecer cuando no toque al plano, mostrarse como un punto, cuando la esfera sea tangente al plano o como un círculo de radio variable cuando la esfera sea cortada por el plano.

Una interpretación que utilice la analogía en lugar de la deducción y busque una interpretación de la misma en las profundidades de un esoterismo mágico, nos coloca ante varios temas sobre los que reflexionar. El primero es sobre el propio concepto matemático de dimensión. Sobre el que se puede decir que las dimensiones por encima de tres no son morada de dioses, ni de los espíritus, ni tampoco el país donde algunos ilusionistas, como Slate, tenían alquilada una parcela, sino que es un concepto que tiene cabida dentro de la geometría. Lo que no tiene sentido es buscar en el espacio intuitivo ordinario la cuarta dimensión. Además, la dimensión matemática admite valores no enteros, sin que eso signifique que el hecho de que un objeto tenga, por ejemplo, dimensión 2,5 tenga que situarse en un lugar físico colocado entre el plano y el espacio.

El segundo tema sobre el que meditar es el de la enorme responsabilidad que tienen los divulgadores de prestigio a la hora de hacer afirmaciones poco afortunadas o realizar comparaciones con materias extracientíficas. Este es el caso de Rey Pastor en su conferencia en el Ateneo. Rey Pastor, que para amenizar al auditorio, aportó una anécdota curiosa en la que el protagonista era el astrofísico y matemático Zöllner. La historieta la protagonizó un científico, pero sólo tenía relación con las matemáticas y la ciencia porque el protagonista era matemático. La anécdota que aportó Rey Pastor parece apoyar la visión esotérica del concepto de dimensión con la opinión de un científico de prestigio como Zöllner que así lo había creído. No obstante, para Rey Pastor la fábula de Zöllner no pasó de ser historieta para el entretenimiento . Ya que en la conferencia siguiente del Ateneo se ocupó del concepto de dimensión y de los espacios *n*-dimensionales. La conferencia la tituló *Funciones de variable real* . En ella trató de esclarecer los conceptos de función y curva y estudió la curva de Peano, además, destacó la importancia de la geometría *n*-dimensional[3]. Si Rey Pastor no hubiera contado el caso de Zöllner habría contribuido a evitar que la magia se relacionara con el concepto de dimensión matemática y habría quitado argumentos de autoridad a lectores futuros, que apelaran a la autoridad del maestro.

El tercer tema sobre el que reflexionar es sobre el valor que tiene el razonamiento por analogía para establecer resultados matemáticos. Por analogía se

[2] La conferencia era *Fundamentos de la Geometría* y es la segunda recogida en Rey pastor, J. (1916) *Introducción a la Matemática Superior. Estado actual. Métodos y problemas,* Manuales Corona, Instituto de Estudios Riojanos, Reimpresión de 1983, pp 35-66.

[3] Rey pastor, J. (1916) *Introducción a la Matemática Superior. Estado actual. Métodos y problemas,* Manuales Corona, Instituto de Estudios Riojanos, Reimpresión de 1983, pp 67-96.

pueden formular proposiciones, pero, para que esas proposiciones formen parte de la ciencia, es decir, para que se consideren probadas y sean consideradas, por lo tanto, científicas, es preciso probarlas con los métodos de las matemáticas[4].

Además, se deben hacer algunas puntualizaciones. La primera es que para los matemáticos la cuarta dimensión (ni siquiera la quinta) no representa un misterio del que se tenga que huir. La cuarta dimensión no es le lugar donde habitan los espíritus ni el sitio donde pueden ocultarse algunos seres de nuestro mundo con poderes extraordinarios. La segunda es que los matemáticos han reflexionado mucho sobre el concepto intuitivo de dimensión que tenemos en la vida ordinaria desde los comienzos de la ciencia griega; se han planteado muchas dudas y han reflexionado muchísimo sobre el tema, lo que ha hecho que se disponga de una definición precisa, inequívoca y bien documentada de este concepto. La tercera puntualización es que al concepto de dimensión matemática se ha llegado siendo coherente con la noción intuitiva de espacio y dimensión geométrica griega y su evolución se ha producido a partir de los propios métodos de la matemática. Otro cuestión, no menos importante, ya apuntada anteriormente, es de carácter metodológico y es que para afianzar un concepto en matemáticas no basta con mostrar alguna analogía con cualquier otra parte de la ciencia o con algún resultado particular concreto de las matemáticas.

2. Un poco de historia sobre el concepto de dimensión

El concepto de dimensión aparece en los *Elementos* de Euclides y fue motivo de escasas especulaciones en el campo de la ciencia hasta el siglo XIX. René Descartes (1595-1649) en el Libro III de su *Geometría* (1637), titulado *Sobre la construcción de problemas sólidos y supersólidos* distinguía entre problemas planos, que se resolvían con ecuaciones de segundo grado, los problemas cúbicos, que implicaban ecuaciones de tercer grado y supersólidos que se solucionaban con ecuaciones de grado superior a tres. Descartes dio procedimientos para resolver estos problemas hasta cuarto grado mediante intersecciones de cónicas, pero admitía sin dificultad que los problemas de grado superior a tres se podían reducir a combinaciones de problemas lineales, planos y sólidos, es decir, admitía la existencia de una realidad física y de problemas reales que se resolvían con ecuaciones de cuarto o quinto grado sin suponer la existencia de un espacio real ordinario de dimensión cuatro o cinco.

Descartes y Pierre Fermat (1601-65) fueron los creadores de la geometría analítica plana, pero la geometría analítica del espacio no la trabajaron. Fueron Phillipe La Hire (1640-1719) y J.Bernouilli (1667-1748) los que iniciaron los estudios de la geometría del espacio. A comienzos del XVIII, Antonio Parent (1666-1716) presentó un trabajo sobre espacios tridimensionales, pero fue A. C. Clairaut (1713-65) el primero que escribió un trabajo sobre curvas alabeadas en el espacio. Finalmente, Leonard Euler (1707-83) sistematizó el estudio de curvas alabeadas en el espacio y marcó la cota más alta alcanzada en el siglo XVIII.

2.1. La dimensión sobre la geometría analítica

A comienzos del siglo XIX apareció una idea importante. Julius Plücker (1801-1868) puso de manifiesto en 1829 que el elemento fundamental de la geometría no tenía que ser necesariamente el punto, que igualmente podía ser una recta u otra figura geométrica cualquiera. Esto es, podríamos considerar el plano como conjunto de puntos, rectas o circunferencias. Plücker puso de manifiesto que la dimensión de un conjunto era el número de coordenadas necesarias para determinar un elemento general del propio conjunto.

En 1847, A. Cauchy (1789-1847) escribió un artículo sobre lugares geométricos analíticos, en los que, superando la concepción restringida a tres dimensiones de la geometría euclídea, definió punto analítico como un conjunto de n variables y lugar geométrico como una ecuación o un sistema de ecuaciones en esas variables.

Fue B. Riemann (1846-66) en su tesis doctoral *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*, presentada en la universidad de Gotinga en 1854 y publicada en 1856 el que extendió la geometría del plano y del espacio al espacio de puntos analíticos de Cauchy, definiendo la distancia entre puntos analíticos, esfera n-dimensional, coseno de dos segmentos analíticos, etc.

---

[4] El respeto de los matemáticos por el método data desde el tiempo de los griegos. Arquímedes de Siracusa (287-212) había descubierto un método mecánico para descubrir enunciados de proposiciones geométricas, pero no las consideraba probadas hasta que no las había deducido a partir de los métodos de la geometría.

Estas ideas permitieron a Plücker desarrollar una ampliación de los conceptos de la geometría analítica y desarrollar en 1865 una teoría sobre la dimensión. Mediante la definición de variedad geométrica como conjunto de elementos geométricos que podían ser representados por un sistema de coordenadas real y continuo, la dimensión de la variedad sería el número de coordenadas necesarias para determinar un elemento del conjunto.

Cuando la geometría analítica desplazó a la euclídea, la comunidad matemática aceptó, de manera natural, que la dimensión era el número de parámetros (coordenadas) necesarios para representar un punto. Es decir, fijado un sistema de referencia cartesiano en el plano, con dos números reales, podíamos representar cualquier punto del plano. Fijado un sistema de referencia cartesiano en el espacio, con tres números reales seríamos capaces de simbolizar cualquier punto del espacio. Está claro que, en geometría, (a,b) representaba un punto en el plano, (a, b, c) representaba un punto en el espacio ordinario y que los puntos (a, b, c, d) no tenían representación geométrica como puntos. No obstante, las operaciones que se hacían en las dimensiones dos y tres se podían extender sin dificultad a dimensiones superiores. Así:

1) La regla del paralelogramo de suma de vectores en dimensiones dos y tres se extiende a:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) + (b_1, b_2, b_3, b_4) =$$
$$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)$$

2) El producto de un escalar por un vector de dimensiones dos y tres se extiende a:

$$t \cdot (a_1, a_2, a_3, a_4) = (ta_1, ta_2, ta_3, ta_4)$$

3) La distancia entre dos puntos en dimensiones dos y tres se extiende sin dificultad:

Si $P = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ y $Q = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, la distancia de P a Q será:

$$d(P,Q) =$$
$$= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 + (b_4 - a_4)^2}$$

Las geometrías n-dimensionales encontraron pronto aplicaciones en la física, por ejemplo, en la teoría de la relatividad se consideran cuatro coordenadas (x, y, z, t), donde las tres primeras son espaciales y la cuarta es el tiempo. También encontraron aplicación en la teoría cinética de los gases, donde era importante expresar, no solamente la posición de una partícula en un punto del espacio (x, y, z), sino también la velocidad de la misma con sus tres componentes (u, v, w). Se hacía, por lo tanto, necesario manejar una geometría en la que cada punto tuviera seis coordenadas (x, y, z, u, v, w) y estaremos en una geometría 6-dimensional, en la que las tres primeras coordenada nos muestran la posición de una partícula en el espacio ordinario y las otras tres nos indican la dirección de la velocidad de la partícula, que tiene una magnitud $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$

2.2. La dimensión y la cardinalidad

Dos conjuntos pueden tener distinta dimensión y tener el mismo número de elementos. Por lo que el concepto de dimensión es independiente del número de elementos. La cara de un cubo tiene el mismo número de puntos que en cubo entero. Estas cuestiones fueron estudiadas por Richard Dedekind (1831-1916) y George Cantor (1845-1918).

Para determinar si dos conjuntos A y B tienen el mismo número de elementos basta con establecer entre ambos una correspondencia biyectiva. Es decir, asociar a cada elemento de A un único elemento de B sin que quede en B ningún elemento desemparejado.

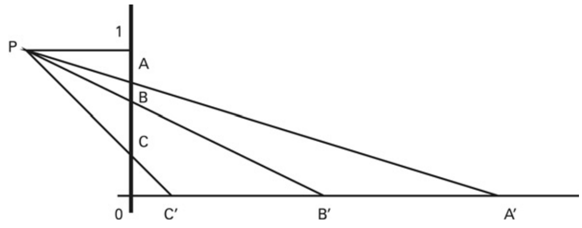
Esta manera natural de comparar conjuntos llevó a situaciones paradójicas. Cuando se pretendía comparar conjuntos infinitos. Por ejemplo, cuando comparamos el conjunto de los números naturales $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ con el de los pares $\mathbf{P} = \{2, 4, 6, ...\}$, se observa fácilmente que el conjunto **P** está contenido en **N**. Sin embargo, cuando tratamos de emparejar los elementos de **P** con los de **N,** asociamos a cada elemento de **N** su duplo en **P** (correspondencia biyectiva entre **P** y **N**) es decir:

$$1 \to 2, \quad 2 \to 4, \quad 3 \to 6, \quad 4 \to 8, \quad 5 \to 10, ...$$

y en ningún conjunto, ni en **P** ni en **N** quedan elementos sin emparejar, por lo que ambos conjuntos tienen el mismo número de elementos, que se resume diciendo que son infinitos equivalentes o coordinables.

Richard Dedekind (1831-1916) utilizó esta pintoresca propiedad de los conjuntos infinitos en su obra *Essais on the Theory of Numbers*, en la que definió conjunto infinito como aquel que tiene un subconjunto propio coordinable con él.

Cuando George Cantor estudió los conjuntos infinitos probó que un segmento de la recta real tiene tantos elementos recta real positiva completa y, por consiguiente, tantos elementos como la recta real completa. Resultado que puede probarse con un modelo gráfico como el siguiente:



Cada recta que pasa por el punto P y corta al segmento (0, 1) en un punto, asocia a este punto otro de la recta real positiva de manera única, como indica la figura.

Cantor siguió estudiando los conjuntos infinitos y llegó a la conclusión de que en el conjunto lineal (0, 1) hay tantos puntos como en el cuadrado (0, 1) x (0, 1) y en el cubo (0, 1) x (0, 1) x (0, 1). Lo que quiere decir que un segmento de longitud uno, tiene tantos puntos como un cuadrado de lado unidad y tantos como un cubo cuya arista mida también la unidad. Para probar esa afirmación es preciso establecer una correspondencia biyectiva entre los puntos del conjunto (0, 1) y con los de cuadrado (0, 1) x (0, 1) y con los del cubo. A título de ilustración esbozamos la construcción de la correspondencia biyectiva entre (0, 1) y el cuadrado (0, 1) x (0, 1).

Esta correspondencia se puede establecer con facilidad:

Sean $I = (0, 1)$, $I^2 = (0, 1) \times (0, 1)$ y $P\ (x, y)$ un punto cualquiera de I^2, donde

$$x = 0,\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \ldots \qquad y = 0,\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4 \ldots$$

a este P de I^2 le corresponde un punto P' de I de la siguiente forma:

$$x = 0,\ a_1\ b_1\ a_2\ b_2\ a_3\ b_3\ a_4\ \ldots$$

Esta correspondencia sería biunívoca si la representación de cada número en forma decimal fuera única para cada número. Pero hay números que tienen dos expresiones decimales diferentes como

$$x = 0{,}1111111\ldots \qquad = 0{,}0999999\ldots$$

Para solucionar esta pega y que la correspondencia entre I e sea biyectiva se hace como si el cero no fuera cifra independiente, esto es que, cuando encontremos un cero en la expresión decimal de una de las coordenadas no intercalaremos solamente el cero, sino el grupo de cifras que va desde ese cero a la primera cifra no nula. Así, al punto P(x,y)

$$x = 0{,}10109017\ldots \qquad = 0{,}50500392\ldots$$

le corresponde

$$P' = z = 0{,}1\ 5\ 01\ 05\ 09\ 003\ 01\ 9\ 7\ 2\ \ldots$$

El infinito no afectaba solamente al hecho de que una parte del conjunto infinito tenía tantos elementos como el conjunto entero. Hecho que mostraba claro enfrentamiento con el principio lógico que dice que el todo es mayor que la parte. Ahora se presentaba una contradicción de otro calibre: el segmento (0,1) que tiene longitud uno y área nula tiene el mismo número de elementos que el cuadrado (0,1) x (0,1) que tiene área unidad ¿Cómo puede ser que un conjunto de área cero tenga el mismo número de elementos que otro de área la unidad? ¿Qué aporta la dimensión si al pasar de la dimensión uno a la dos no añade más elementos a los conjuntos?

Este problema fue planteado en una carta de Cantor a Dedekind en 1877. Dedekind observó que la correspondencia tal que a cada punto P(x,y) le hacía corresponder un punto P' en la recta real era biunívoca, pero no era continua, esto significaba que a puntos próximos a P no les corresponden puntos próximos a P' y recíprocamente. Dedekind formuló la conjetura de invarianza[5] de la dimensión. Esta conjetura la intentaron probar numerosos matemáticos, incluido el propio Cantor, pero hasta 1911 no apareció una demostración satisfactoria, que fue la realizada por el matemático intuicionista L.E.J. Brouwer (1881-1966).

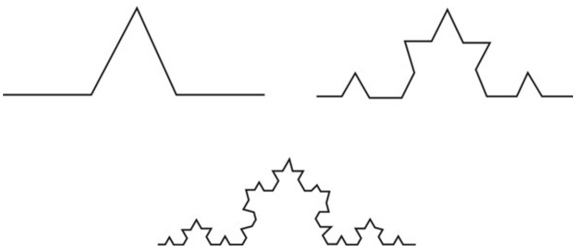
2.3. La dimensión fractal

Otra situación que hizo profundizar en el concepto de dimensión fue la aparición en el panorama de las matemáticas de las curvas conocidas inicialmente como patológicas. Estas curvas tenían la propiedad de que se definían paramétricamente, como las demás curvas, pero, al representarlas geométricamente, presentaban ciertas particularidades. La curva de H. Koch (1870-1924) o copo de nieve se dibuja en recinto de plano acotado y tiene longitud infinita; la curva de G. Peano (1858.1932) llenaba todos los puntos de un cuadrado. Estas curvas tan peculiares plantearon el problema siguiente, que afectaba de lleno al concepto de dimensión: por ser curvas debían tener dimensión uno, pero la curva de Peano que llenaba un cuadrado, por llenar una superficie, debía tener dimensión dos. Los estudios de estas curvas

[5] Si se consigue establecer una correspondencia biunívoca entre dos variedades una A de dimensión a y otra B de dimensión b, entonces si a y b son distintas la correspondencia es necesariamente continua. Este resultado también es conocido por Rey pastor como lo refleja en la conferencia tercera en el Ateneo en 1915.

(copo de nieve, curva de Hilbert, curva dragón, etc) llevaron a distinguir el grado de complejidad de una curva mediante su dimensión de Haussdorff, en su versión de dimensión de autosemejanza. Así, las curvas complicadas podían tener una dimensión entre uno y dos.

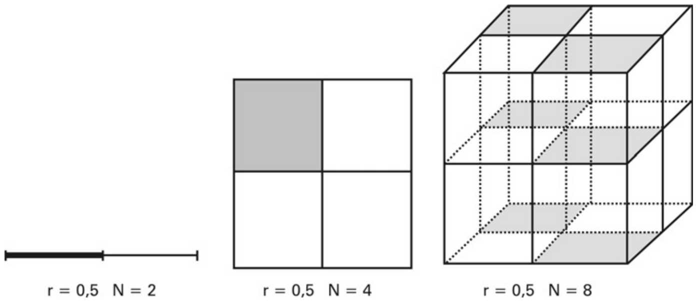
Tomemos como ejemplo la curva de Koch, de la que se muestran a continuación las tres primeras iteraciones. Partiendo de la primera, la segunda iteración se obtiene sustituyendo cada uno de los tramos rectos por un tramo semejante al primero con razón de semejanza $\frac{1}{3}$. El proceso se repite en la tercera iteración, que se obtiene a partir de la segunda sustituyendo cada tramo recto por un tramo semejante al primero con razón de semejanza $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ y se obtiene:



Así, la segunda iteración tiene cuatro copias semejantes a la primera con razón de semejanza $\frac{1}{3}$ la tercera 16 copias semejantes a la primera con razón de semejanza $\left(\frac{1}{3}\right)^2$. La curva de Koch es autosemejante[6] de cuatro copias de razón $\frac{1}{3}$, porque cada iteración está formada por cuatro copias (disjuntas dos a dos) de razón $\frac{1}{3}$.

Esta observación de repetir copias autosemenjantes se utilizó para extender el concepto de dimensión, sin más que hacer las siguientes reflexiones:

a) El intervalo [0,1] es autosemejante a dos copias de razón $\frac{1}{2}$, ya que $[0,1]=\left[0,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},1\right]$ también es equivalente a tres copias de razón $\frac{1}{3}$, a cuatro copias de razón $\frac{1}{4}$ ... a k copias de razón de semejanza $\frac{1}{k}$.



b) El cuadrado [0,1] x [0,1] es autosemejante a cuatro copias de razón de semejanza $\frac{1}{2}$:
$\left[0,\frac{1}{2}\right] \times \left[0,\frac{1}{2}\right]$, $\left[0,\frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2},1\right]$, $\left[\frac{1}{2},1\right] \times \left[0,\frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2},1\right] \times \left[\frac{1}{2},1\right]$, también es equivalente a nueve copias de razón $\frac{1}{3}$, a dieciséis copias de razón $\frac{1}{4}$ ... a k^2 copias de razón de semejanza $\frac{1}{k}$

c) El cubo [0,1] x [0,1] x [0,1] es autosemejante a ocho copias de razón de semejanza $\frac{1}{2}$, a veintisiete copias de razón de semejanza $\frac{1}{3}$, ... a k^3 copias de razón de semejanza $\frac{1}{k}$

Todo esto se puede resumir en las siguientes conclusiones:

DIMENSIÓN	FIGURA	RAZÓN DE SEMEJANZA	NÚMERO DE COPIAS (N)
1	Segmento rectilíneo	$r = \frac{1}{k}$	$N = k$
2	Cuadrado	$r = \frac{1}{k}$	$N = k^2$
3	Cubo	$r = \frac{1}{k}$	$N = k^3$
....		....	....
n	Cubo n dimensional	$r = \frac{1}{k}$	$N = k^n$

[6] Autosemejante significa que cualquier subconjunto propio es equivalente o semejante al conjunto total, aunque más pequeño.

De donde se puede obtener, teniendo en cuenta que N es el número de copias, r la razón de semejanza, k el inverso de dicha razón y n la dimensión que:

$N = k^{n}$, por tanto $r^{-n} = N$, tomando logaritmos:

$\log N = -n \log r$, por lo tanto $n = -\dfrac{\log N}{\log r}$

Esta fórmula relaciona la razón de semejanza con el número de copias semejantes y la dimensión del espacio. Y se puede aplicar a todas las figuras que presenten autosemejanza.

Aplicando esa fórmula a la curva de Koch en la que hay cuatro copias de razón $\dfrac{1}{3}$. Por lo tanto ($N = 4$, $r = \dfrac{1}{3}$) se tiene que la curva de Koch tiene de dimensión:

$$n = -\frac{\log 4}{\log \frac{1}{3}} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1{,}262....$$

Lo cual no dice más que la curva de Koch es más compleja que una curva elemental que tiene de dimensión la unidad.

3. Consideraciones finales

Con el esbozo anterior se puede apreciar el primoroso cuidado con el que se ha ido fortaleciendo y enriqueciendo el concepto de dimensión matemática y podemos extraer una serie conclusiones. La primera, aunque parece obvia, es preciso hacer notar que las dimensiones superiores a tres no las encontraremos intuitivamente moviéndonos sin ningún bagaje teórico en el espacio intuitivo ordinario. Además, existen en matemáticas otras dimensiones no enteras como es el caso del conjunto de Cantor (dimensión 0,6039), la curva de Peano (dimensión 2), triángulo de Sierpinki (dimensión 1,5849) en los que la dimensión no indica un lugar del espacio intuitivo, sino el grado de complejidad de esos conjuntos.

La segunda conclusión es que las sucesivas modificaciones del concepto de dimensión se han producido por la aparición de hechos notables. El primer suceso destacable fue la aparición del cálculo literal y de la geometría analítica. Sin entrar en excesivas matizaciones, podemos asegurar que la implantación de los métodos algebraicos en la geometría, con la consiguiente relegación de la geometría euclídea, llevó considerar los espacios n-dimensionales como realidades matemáticas. La identificación de dimensión geométrica con número de coordenadas en los métodos de la geometría analítica llevó a una situación en la cual las coordenadas no representaban solamente largo y ancho. También podían significar presión-volumen, tiempo-trabajo o el espacio de fases de la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales. En este proceso, el espacio euclídeo aparece como un caso particular de la geometría analítica.

El segundo hecho crucial que contribuyó a la matización del concepto de dimensión fue el desarrollo de los métodos del calculo infinitesimal. Este hecho no se podría haber producido sin la aparición de la geometría analítica. La necesidad de definir con precisión los conceptos de curva y función llevó al descubrimiento de los llamados conjuntos extraños, como el conjunto de Cantor o las conocidas como curvas patológicas, que llevaron a caracterizar la complejidad de estos conjuntos como conjuntos de dimensiones no enteras.

Tampoco debemos pasar por alto el hecho que se produjo cuando Cantor elaboró la teoría de conjuntos y caracterizó los diferentes niveles de infinito. El concepto de dimensión se vio matizado por el axioma de Dedekind enunciado anteriormente de modo que el concepto de dimensión quedó asociado al de función continua.

La geometría analítica, el cálculo infinitesimal y la teoría de conjuntos infinitos han sido hechos concretos, que han influido en la modificación. Estos descubrimientos supusieron un avance enorme en el desarrollo de las matemáticas. La revolución y el progreso que supusieron estos descubrimientos está fuera de posibles de interpretaciones. Sin embargo, las identidades matemáticas: $3^2 + 4^2 = 5^2$ y $3^3 + 4^4 + 5^3 = 6^3$ consideradas aisladas no son más que curiosidades matemáticas y la solución de las ecuaciones $a^2 + b^2 = c^2$ y $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$ aunque suponen ideas brillantes y llenas de ingenio no tienen el alcance teórico de los descubrimientos anteriormente expuestos. Pero, además, si esas identidades son interpretadas de una forma, cuando menos discutible y se pretende que una interpretación particular tenga la misma influencia que tres de los más grandes descubrimientos en matemáticas es casi seguro que no obtendremos resultados positivos.

Es fácil concluir que interpretaciones de unas fórmulas sacadas de su contexto hacen al edificio de las matemáticas el mismo efecto que el aleteo de las mariposas frente a las murallas de un castillo. Pero los descubrimientos matemáticos tan brillantes como las soluciones enteras de la ecuación pitagórica $a^2 + b^2 = c^2$ y la ecuación $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$ de los cuatro cubos son tan bellos que pueden echar a volar las mariposas de la imaginación de los matemáticos aficionados.