Nueva filosofía de las matemáticas

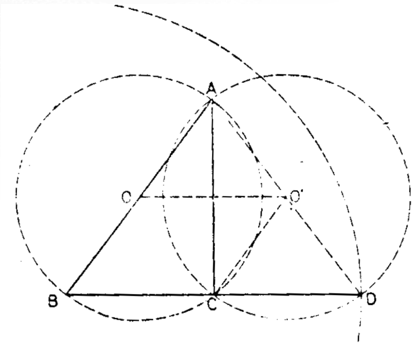
Julián Sanz Pascual

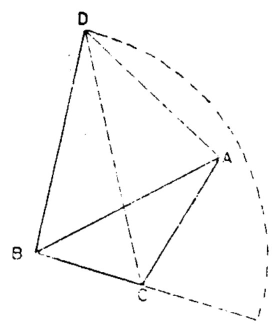
No soy matemático de profesión, sino que me dedico a la filosofía; en las matemáticas, únicamente me considero un buen aficionado. Esta afición me llevó hace ya un montón de años a hacer un descubrimiento que me parece de un extraordinario interés, nada menos que la cuarta dimensión del espacio.

Introducción

Cuando en el año 1975 hice la primera publicación sobre la cuarta dimensión, un opúsculo titulado *Teorema de los cuatro cubos y ecuación del espacio real*, pensé que iba a entusiasmar a los matemáticos, pero no fue así, sino que incluso los hubo que se molestaron por el tono poco respetuoso, según ellos, en que estaba escrito.

No obstante y convencido como estaba del valor de lo que había descubierto, el año 1979 presenté en la Facultad de Filosofía de la Complutense de Madrid una Tesis Doctoral con el título *La cuarta*





dimensión del espacio, nuevos esquemas para una filosofía de las matemáticas. Me la había dirigido el Doctor Pascual Martínez Freire, profesor del Departamento de Lógica. La Tesis fue rechazada frontalmente por un profesor de la Facultad de Exactas al que se invitó para que formase parte del tribunal: su dictamen, según me contó el propio Director de la Tesis, fue que eso no tenía nada que ver con las matemáticas. Pero es que en mi propia Facultad, el rechazo del departamento de Metafísica fue también contundente: un profesor dijo de ella que no era de recibo, precisamente el que nos había dado un curso de Doctorado sobre Descartes, el filósofo del método, uno de los pensadores que más han influido en el formalismo que desde entonces ha venido dominando en las matemáticas, también uno de los que más me han interesado, precisamente a consecuencia de ese curso.

La situación no me arredró y después he venido publicando algunos artículos sobre el tema, en este *Manual Formativo,* "El porvenir de las matemáticas" (nº 21, p. 59). Incluso en 2002 publiqué por mi cuenta un libro titulado *La cuarta dimensión, una alternativa al teorema de Fermat (Nueva filosofía de las matemáticas)* (Segovia, 2002, 162 págs.).

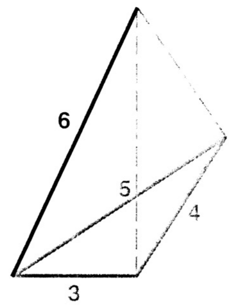
Las reacciones que he observado a este libro me han permitido comprender cuál es la dificultad para que los matemáticos se interesen por mi descubrimiento. Sin duda el frontal rechazo que he citado del profesor de la Facultad de Exactas lo dice todo: lo que yo he descubierto no tiene nada tiene que ver con las matemáticas. ¿Por qué? Entiendo que por dos razones:

1ª. Porque el formalismo matemático ha llevado a esta ciencia a identificar su objeto con el método, también con su historia.

2ª. Porque mi ecuación de cuatro cubos no tiene sitio en esa historia.

1. Mi propuesta, su historia

Un día, tratando de resolver la ecuación de tres cubos, cosa que entonces yo no sabía que es imposible, no tardé en darme cuenta de que al cubo han de ser cuatro como mínimo, pues cuatro como mínimo son los puntos no en el mismo plano que determinan un espacio. Hablamos de soluciones racionales. En efecto, por simple tanteo, a la tercera encontré la solución: $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. Al instante me di cuenta que con los tres primeros números se puede establecer una relación al cuadrado, $3^2 + 4^2 = 5^2$, el celebérrimo teorema de Pitágoras. Al instante también supuse que alguna relación debía de haber entre ambas ecuaciones.



$$\boxed{3^2 + 4^2 = 5^2}$$

$$\boxed{3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3}$$

En efecto, la ecuación de los tres cuadrados es la ecuación del plano, pues tres como mínimo son los puntos no en la misma recta que determinan un plano. Esta ecuación es la más sencilla que permite una relación de igualdad entre tres puntos del plano, los lados de un triángulo. Si nos limitamos a las relaciones lineales, las únicas que podemos establecer entre sus lados son inecuaciones: cada lado es siempre menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia:

$$a + b > c; a - b < c$$

En consecuencia, la ecuación de los tres cuadrados es la más sencilla que nos permite entrar con naturalidad en la geometría del plano. Por analogía, la ecuación de cuatro cubos ha de ser la más sencilla que nos permite entrar también con naturalidad en la geometría del espacio. Y digo con naturalidad porque las relaciones cúbicas son las que se corresponden con la verdadera naturaleza del espacio. Esto descarta como ecuación del espacio la que de la esfera nos da la geometría analítica: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Sería a lo sumo una ecuación convencional que puede servir para resolver algunos problemas *superficiales*, nunca mejor dicho, de ninguna manera una ecuación natural, que es la que nos permitiría resolver los problemas de más *fondo*.

La verdad es que, según esta tesis mía, la verdadera geometría del espacio aún permanece inédita, lo mismo que la del plano lo estaría si no se hubiese descubierto hace muchos siglos la ecuación de los tres cuadrados. Estamos hablando del plano real o limitado y del espacio real o limitado también.

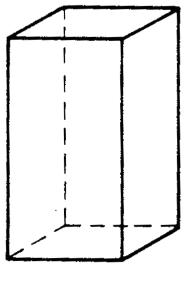
2. El plano tiene tres dimensiones y el espacio cuatro

La idea compartida durante siglos por la mayoría de la gente es que el plano tiene dos dimensiones y el espacio tres. El fundamento intuitivo es que el área de cualquier figura plana se obtiene multiplicando la base por la altura; de igual suerte, el volumen se obtiene multiplicando las dos dimensiones de la base por la altura, que sería la tercera.

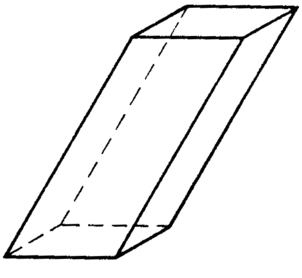
En un rectángulo es así, ¿pero un rectángulo tiene dos dimensiones? Yo veo tres como mínimo, pues la diagonal también es una dimensión, que va a depender no sólo de la longitud de los lados, sino del ángulo que formen, que en este caso es recto, pero que podía ser mayor o menor, lo que daría lugar al romboide. Por otra parte, la superficie de un triángulo, la figura más simple, se obtiene multiplicando la base por la altura y por 1/2, lo que hace que su fórmula no sea de dos factores, sino de tres. También es de tres la del rectángulo, sólo que, según su naturaleza, el factor es 1, que no es necesario poner, pues no modifica el resultado.

En el volumen ocurre algo parecido. De un cubo decimos que su volumen es la arista al cubo, $V = l^3$. De una pirámide decimos que el volumen es el producto del área de la base por la altura multiplicado por 1/3. Suponiendo que la base fuese un cuadrado, la fórmula sería: $V = 1/3.l^2.h$. Aquí hay cuatro factores, siendo 1/3 el que nos indica la naturaleza geométrica del cuerpo, de manera que el volumen de un cubo debería ser $V = l^3.1$. Lo que pasa es lo mismo que en plano, que el coeficiente 1 lo olvidamos puesto que no modifica el resultado.

Concretando: en el plano, aunque realmente nos estamos moviendo en tres dimensiones, aparentemente lo estamos haciendo en dos. Lo mismo ocurre en el espacio, que pensamos que nos estamos moviendo en tres dimensiones, pero subrepticiamente se nos cuela una cuarta.



Prisma recto



Prisma oblicuo

La cuestión, sin embargo, no queda absolutamente aclarada, pues la ciencia matemática que se ha hecho hasta ahora ha supuesto que el plano tiene dos dimensiones y el espacio tres, y parece que los problemas se han ido resolviendo, aunque todavía tengamos pendiente alguno como el de la duplicación del cubo, al menos de manera tan sencilla como el de la duplicación del cuadrado.

Es claro, por tanto, que al proponer esta cuarta dimensión para el espacio, y para justificar esta novedad e interesar a los matemáticos en ella, sería necesario apuntar qué ventajas comporta o que soluciones facilita que no se puedan alcanzar con tres dimensiones. Pongamos de ejemplo esta ecuación diofántica de quince cubos:

$$a^3 = b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + f^3 + g^3 + h^3 + i^3 + j^3 + k^3 + l^3 + m^3 + n^3 + o^3$$

Invito a cualquier matemático a que me busque las soluciones racionales. No sé si, con una potentísima calculadora y sabiendo que las soluciones están entre los cien primeros números, un expertísimo en informática podría encontrar la solución por tanteo. Sin embargo este modesto filósofo, que no pasa de ser un aficionado a las matemáticas, lo consiguió en muy poco tiempo sin otros instrumentos que unos folios y un bolígrafo, pero, claro, pensando en cuatro dimensiones y no en tres como tradicionalmente nos han enseñado, y combinando desarrollos aritméticos y geométricos. La prueba aquí está:

$$96^3 = 78^3 + 66^3 + 42^3 + 25^3 + 24^3 + 18^3 + 17^3 + 15^3 + 14^3 + 12^3 + 7^3 + 5^3 + 4^3 + 3^3$$

3. Problemas que la cuarta dimensión puede plantear a los matemáticos

El problema general para los matemáticos es que esta cuarta dimensión les rompe algunos esquemas. En cualquier saber, los nuevos descubrimientos suelen resultar traumáticos, sin duda por el efecto de rechazo que por la ley de la inercia generalmente se produce en algunos de sus cultivadores. Cada ciencia suele ser un cuerpo de doctrina con unas formulaciones más o menos compartidas por todos o por la gran mayoría en un determinado momento. Todo suele funcionar razonablemente bien hasta que un ignorante como yo descubre un hecho que no encaja en esas formulaciones.

A las matemáticas, en cuanto saber aplicado a los objetos de otras ciencias, no les resulta difícil asumir cualquier hecho nuevo que no encaje en sus fórmulas, no dudando en modificarlas o en proponer otras en que encaje mejor. Un ejemplo muy sencillo y muy conocido: Copérnico suponía que las órbitas de los planetas eran circulares y que el sol ocupaba el centro, pero había datos de la observación, como era la diferente velocidad que adquirían, que no se podían explicar con ese modelo, lo que llevó a Kepler a proponer que las órbitas fuesen elípticas y que el sol ocupase uno de los focos.

El problema ahora de *la cuarta dimensión* está en que se trata de una propuesta que afecta a objetos de las propias matemáticas, en este caso al espacio puro, sin materialidad alguna, esto al menos desde que el célebre experimento de Michelson-Morley en el siglo XIX demostró, contra lo que se había supuesto, que el éter no existía. Siendo así, los enunciados sobre el espacio ya no pertenecen a la física, sino a las matemáticas. ¿Quiere decir entonces que todos sus enunciados han de ser formales? Conviene advertir que el célebre experimento demostró que el espacio, ciertamente, no tiene *materialidad* alguna, pero esto no quiere decir que no tenga su propia *realidad*.

4. La realidad de los objetos matemáticos

Ya hemos dicho que las matemáticas no han tenido especiales dificultades para modificar sus formulaciones cuando eran aplicables a los objetos de otras ciencias, la dificultad está en los objetos de las propias matemáticas. Se supone que los objetos de las ciencias de la naturaleza sí tienen realidad, ¿la tienen los objetos de las matemáticas? Si identificamos *realidad* con *materialidad*, es evidente que los objetos de las matemáticas no tienen realidad, ahora bien ¿que ocurre si entendemos como *realidad* a la imposibilidad de determinar mediante un método o una fórmula todo lo que una cosa es? A no ser que entendamos a las matemáticas, que ya sería *la matemática*, como una gigantesca tautología en la que a todas sus proposiciones se pueda llegar de manera deductiva. Esto exigiría, entre otras cosas, un lenguaje en el que no se incurriese en contradicción, un método en el que la consistencia fuese absoluta.

Fijémonos, por ejemplo, en los *números*. Lo primero que yo he podido observar es que no es lo mismo el *número* que su *numeral*. El *numeral* no es otra cosa que el signo con el que se *nombra* el *número*. Esto lleva al hecho de que haya *numerales* idénticos que se utilizan para designar *números* diferentes. En el caso de las series de cada potencia esto es evidente:

1ª.- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.......
2ª.- 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49.......
3ª.- 1, 8, 27, 64, 125, 216.......

El *numeral* 1 es el mismo para las tres series, lo que fácilmente nos conduce a esta conocida contradicción:

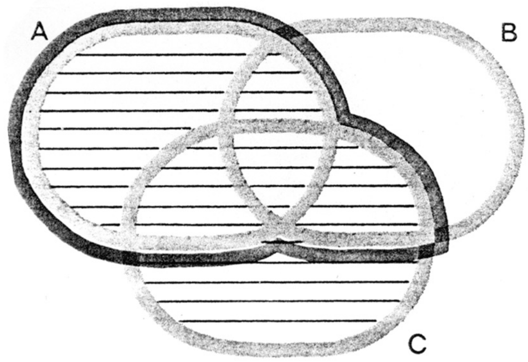
$1^0 = 1; 1^1 = 1; 1^2 = 1; 1^3 = 1$..

Consecuentemente $1^0 = 1^1 = 1^2 = 1^3$...

Luego $0 = 1 = 2 = 3$..., lo que es un disparate.

¿Cuál es el origen de este disparate? Pues que con el *numeral* 1 designamos en cada caso *números* completamente distintos, incluso irreductibles entre sí: el primero es una razón, el segundo es una unidad lineal, el tercero una unidad cuadrada y el cuarto una unidad cúbica. Esta contradicción se subsanaría con un sistema de numeración en el que desapareciese toda clase de *homonimias*. ¿Pero es posible un sistema así? En el lenguaje ordinario la homonimia es moneda corriente en la escritura, lo que se resuelve fácilmente gracias al sentido en la lectura. Permítaseme un viejo chascarrillo. Dos amigos se encuentran y uno le dice al otro "¿No sabes? Me he casado con una *muda*". Y el otro le contesta: "Pues yo, chico, me he casado con *lo puesto*". Es evidente que la palabra "muda", que se emplea una sola vez, tiene dos significados distintos. Esto lo entendemos fácilmente y de manera espontánea al sentido. En el lenguaje matemático no existe esta posibilidad, lo que nos conduce a absurdos o disparates como el que estamos comentando.

En lo que los matemáticos llaman *números naturales*, la cuestión se resuelve en que los números no son puros, sino que ya se trata de conjuntos de cosas:



$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

un caballo, dos caballos, tres caballos...; una vaca, dos vacas, tres vacas... Si nos olvidamos del contenido de cada número, podemos caer en los mayores disparates, los mimos en que hemos incurrido al identificar el *número* con el *numeral*. En la escuela primaria a los números que se referían a la misma clase de elementos se los denominaban números o cantidades *homogéneas*, mientras que los que referían a elementos de diferente clase se los denominaban números o cantidades *heterogéneas*. Esto era necesario tenerlo en cuenta al hacer las sumas, lo que no es más que uno de los problemas fundamentales que se plantea la lógica al manejar conjuntos.

En la geometría, el tema de la *realidad* de sus objetos resulta capital para no perdernos y caer en absurdos. Por referirnos sólo a las cuatro entidades fundamentales, el espacio, el plano, el segmento y el punto, la realidad de cada una ellas se prueba en la imposibilidad de reducir unas a otras o todas a la misma. Esta reducción la ha pretendido hacer la matemática más rabiosamente formalista tratando de reducir el espacio al plano, el plano al segmento y el segmento al punto ¿Esto es posible?

El error de la matemática formalista arranca de su obsesión analítica, que tiene su principal mentor en Leibniz (1646-1716). En el caso de la geometría, piensan que, en una división sucesiva, se puede llegar a la más simple de todas, al punto, suponiendo que en él van a encontrar la razón de todo lo que es. Pensemos en el segmento rectilíneo. Lo puedo dividir en dos, en cuatro, en miles de partes. Como se trata de una realidad amorfa, cada parte conserva las propiedades del todo, sin otra diferencia que la meramente escalar, que sólo plantea problemas prácticos o técnicos si se quiere. Ahora bien, la matemática analítica ha pensado que se podía continuar la división hasta el infinito, lo que nos conduciría a un segmento que no tuviese longitud alguna, lo que ya sería el punto. Pero ahora resulta que por miles y miles de puntos que juntemos no se va a obtener longitud alguna, lo que quiere decir que la división al infinito del segmento lo ha desnaturalizado.

Lo mismo ocurre en el plano con respecto al segmento, que por muchos que adosemos no vamos a obtener ni la más insignificante superficie. De igual suerte, por muchos planos que superpongamos, no vamos a obtener ni el más insignificante volumen. Esto quiere decir dos cosas: que del segmento al punto es imposible pasar de manera continua o analítica, lo mismo que del punto al segmento. Tampoco del plano al segmento ni a la inversa, ni del espacio al plano ni a la inversa. Repito, es imposible hacerlo de una manera formal o analítica o continua, sí es posible hacerlo de manera sintética o intuitiva o mediante un salto.

Remitámonos a tres definiciones corrientes de segmento rectilíneo o de la recta si se quiere: “la distancia más corta entre dos puntos”, “un conjunto de puntos en la misma dirección”, “una sucesión de puntos en la misma dirección”. En las tres definiciones me parece que, además de la noción de punto, hemos introducido otras varias que no son precisamente puntuales, prácticamente una por cada palabra: “distancia”, “más”, “corta”, “entre” y “dos”, por referirnos sólo a la primera definición. Por tanto es una falacia decir que deductivamente pasamos el punto al segmento. Lo mismo se puede decir del plano con respecto al segmento y del espacio con respecto al plano. Se trata de realidades distintas, cada una con su propia entidad. Es más, el espacio es la más rica de todas, lo que quiere decir que implica a las restantes; lo mismo se puede decir del plano con respecto al segmento y del segmento con respecto al punto. En términos de lógica matemática se puede decir que el espacio implica el plano, el plano implica el segmento y el segmento implica el punto, pero no a la inversa.

$$\text{espacio} \rightarrow \text{plano} \rightarrow \text{segmento} \rightarrow \text{punto}$$

Entonces, deductivamente podemos pasar del espacio al plano, del plano al segmento y del segmento al punto, pero no a la inversa como pretende el formalismo.

5. La demostración en el espacio con las soluciones 3, 4, 5 y 6

A ningún matemático se le ha ocurrido intentar deducir la ecuación de cuatro cubos, la del espacio, de la de tres cuadrados, la del plano. A mí se me ha ocurrido la inversa, y he tenido éxito, aunque hasta ahora sólo haya sido en las soluciones más simples: $6^3 = 5^3 + 4^3 + 3^3$.

Comencemos por la conocida posibilidad de pasar de la proporcionalidad de los lados en los triángulos semejantes que se forman en uno rectángulo cuando se traza la altura correspondiente a la hipotenusa (teorema de Thales), a la relación cuadrática de los mismos (teorema de Pitágoras). Fig. 1 (a).

Siendo ABC un triángulo rectángulo, fig. 1 (a), si trazamos la altura correspondiente a la hipotenusa,

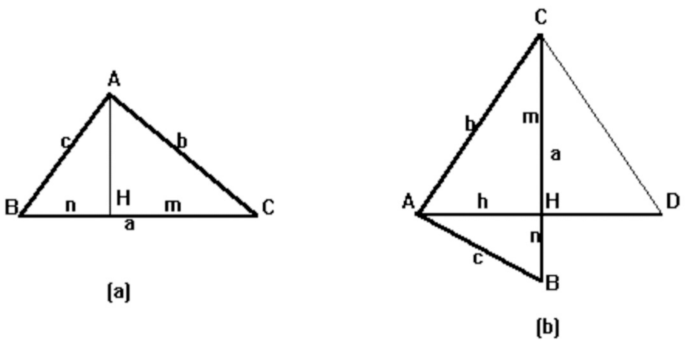


Figura 1

AH, se nos forman dos triángulos ABH y ACH, que son semejantes al primero. Aplicando la proporcionalidad de los lados, tenemos que

$$b^2 = a.m \quad y \quad c^2 = a.n$$

Sumando miembro a miembro ambas igualdades, tenemos:

$$b^2 + c^2 = a.m + a.n = a(m + n)$$

Como m + n = a, entonces $b^2 + c^2 = a^2$

La pregunta que, por analogía, cabe hacerse es si, en el terreno de la geometría del espacio, es posible pasar de la ecuación de tres cuadrados a la de cuatro cubos. Mi opinión es que esto no es posible, al menos *a priori*, pero sí la inversa, pues, como ya se ha dicho, la geometría del espacio implica la del plano, aunque la del plano no implica la del espacio.

Nosotros lo hemos conseguido con mucha facilidad en un caso particular de la ecuación de cuatro cubos, en las soluciones más simples, 6, 5, 4 y 3. En la figura 1(b), tenemos el triángulo rectángulo ABC. En él trazamos la altura correspondiente a la hipotenusa y la prolongamos su misma longitud hasta el punto D. Así, tenemos tres triángulos semejantes, ABC, ABH y ACH. Aplicando el teorema de los cuatro cubos en el triángulo ABH primero y en ACH después, tenemos:

(I) $(2n)^3 = c^3 + h^3 + n^3$, de donde: $7n^3 = c^3 + h^3$

Como $c^2 = an$ y $h^2 = mn$, tenemos:

$$7n^3 = can + hmn$$

Dividiendo por n, nos queda:

$$7n^2 = ca + hm \qquad (1.^a)$$

(II) $(2h)^3 = b^3 + m^3 + h^3$, de donde: $7h^3 = b^3 + m^3$

Como $b^2 = am$ y $h^2 = mn$, tenemos:

$$7hmn = bam + m^3$$

Dividiendo por m, nos queda:

$$7hn = ba + m^2 \qquad (2.^a)$$

Sumando miembro a miembro las fórmulas 1.ª y 2.ª, y ordenándolos, tenemos:

$$7hn + 7n^2 = ba + ca + m^2 + hm$$

Sacando factores comunes, nos queda:

$$7n(h + n) = a(b + c) + m(m + h)$$

Como las sumas que están dentro de cada paréntesis lo son respectivamente de los catetos de los tres triángulos semejantes que se han formado, al estar sus respectivos lados homólogos en la proporción 3, 4, 5, estas sumas estarán en la misma proporción. Entonces, sustituyendo cada suma por sus respectivos números proporcionales, nos queda:

$$7n.3 = a.5 + m.4$$

Como a = m + n, sustituyendo, tenemos:

$$21n = 5(m + n) + 4m$$
$$21n = 5m + 5n + 4m$$

Reduciendo términos semejantes, queda:

$$16n = 9m$$

Estos coeficientes, 16 y 9, corresponden, como puede comprobarse, a la relación métrica entre los segmentos del triángulo estudiado.

Hay que advertir que en la figura 1(b) el punto D se puede considerar con la proyección sobre el plano del cuarto punto, el del vértice superior de un tetraedro.

No se nos escapa el hecho, insistimos, de que este paso del espacio al plano sólo lo hemos conseguido en las soluciones 3, 4. 5 y 6 de la ecuación de cuatro cubos. Pero lo que nos interesa ahora es el proceso y, sobre todo, la pregunta de si es o no reversible. Ciertamente, después de haber conocido el camino de ida, *a posterior*i, resulta posible hacer el camino de vuelta, pero dudo mucho de que esto mismo se hubiese podido conseguir en un puro *a priori*, mucho menos sin haber conocido el teorema de los cuatro cubos y sin haber tenido la idea de su posible geometrización. Lo que sí se podía haber hecho es una trampa, lo que el zorro, borrar el camino de ida con la cola y después presumir de haber inventado el camino de vuelta.

6. El V postulado

El llamado "El programa de Hilbert", que no son más que los 23 problemas que este ilustre matemático (1862-1943) propuso con motivo del año de las matemáticas que se celebró en 1900 - lo mismo que se ha querido repetir en el 2000 con motivo del final de siglo y de milenio -, en el problema nº 4 dice algo tan simple como esto: "Problema de la línea recta como la distancia más corta entre dos puntos". Y a continuación escribe entre paréntesis: " (Las geometrías alternativas)".

¿Y qué son "las geometrías alternativas"? La verdad es que, desde la escuela más primaria, a todos nos han enseñado que geometrías no hay más que una, igual que madres. Pero los matemáticos de profesión son así de complicados.

Todo el problema arranca del célebre V postulado de Euclides. De los diferentes enunciados que se han dado, el más sencillo me parece éste: "Por un punto exterior a una recta sólo se puede trazar una paralela". Fig. 2.

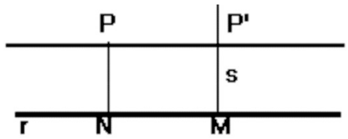


Figura 2

Tracemos la recta *r* y, exterior a ella, el punto *P*. Tracemos a continuación la perpendicular a *r* desde el punto *P*, que la cortará en el punto *N*. A continuación elegimos el punto *M* de la misma recta *r* y trazamos por él la perpendicular *s*. Llevamos la distancia *NP* a esta perpendicular desde el punto *M*, lo que nos dará el segmento *MP'*. Si unimos los puntos *P* y *P'*, tendremos el cuadrilátero rectángulo *PNMP'*. Es indudable que los lados *PP'* y *NM* son paralelos y que, si prolongamos a aquél por ambos extremos, la recta que nos dé ha de ser paralela a la recta original *r*.

Me parece que no hay que ir a Salamanca para entender una cosa tan sencilla. Pero viene la matemática formalista y te dice que esa demostración no es válida, que se basa en la *intuición*, en el sentido de la *vista*, que, como está demostrado, muchas veces nos induce a error. La verdad es que este formalismo se olvida de algo esencial, y es que la intuición no la hacemos sobre los dibujos físicos que hemos hecho, sino sobre las figuras ideales que éstos representan, lo que quiere decir que la intuición no es sensible, sino intelectual o formal, pues no va a depender de la perfección física del dibujo. Así hay que entender esta frase de Henri Poincaré, "La geometría es el arte de las demostraciones bien hechas sobre dibujos mal hechos".

7. Las geometrías no-euclídeas

Los matemáticos formalistas, con respecto al V postulado, han llegado a esta conclusión: si no se puede demostrar que por un punto exterior a una recta pasa una sola paralela, entonces es posible que sea falso, luego se le puede negar sin contradicción. Esta negación puede hacerse de dos maneras: por un punto exterior a una recta pasan infinitas paralelas y por un punto exterior a una recta no pasa ninguna. Ésta fue la primitiva idea de Federico Gauss (1777-1855), la que dio lugar a las llamadas geometrías no-euclídeas. Así, como alguien ha dicho con humor, en lugar de una pacífica monarquía, se instauró un inquietante triunvirato.

Pero la cosa no acabó aquí, sino que Bolyai por un lado y Riemann por otro, trataron de justificar estas dos nuevas geometrías. Y se les ocurrió que el plano posiblemente no era tan plano como se le suponía, lo que conducía a que la recta trazada en él posiblemente tampoco era tan recta. Y siendo así, era posible que por un punto exterior a una recta se pudiesen trazar bien infinitas paralelas bien ninguna, según el sentido de su curvatura. Fig. 3.

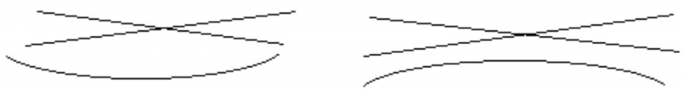


Figura 3

Si la curvatura es envolvente para el punto, no se puede trazar ninguna paralela, pues, aunque sea muy a lo lejos, necesariamente se han de encontrar; si la curvatura va en sentido contrario, se pueden trazar infinitas paralelas. Mas otra vez tenemos aquí la falta de finura formal de los matemáticos formalistas, pues no advirtieron que, si se acepta la hipótesis de la curvatura del plano para curvar a la recta originaria que se trace en él, igualmente habrá que aceptar la curvatura de las rectas que se tracen por un punto exterior a ella, lo que ha de hacer posible que en todo caso el paralelismo se mantenga. Por otra parte tenemos el absurdo del *plano curvo*: si el plano es curvo, entonces no es plano; lo mismo que, si la recta es curva, entonces ya no es recta. Es más, una línea curva no se puede dar en la recta, sino en el plano, ya que ha de tener tres puntos que no están en la misma recta, lo que ya determina un plano. Ciertamente que nuestro lenguaje ordinario tiene la virtud de soportar esta clase de contradicciones sin saltar por los aires hecho pedazos, pero es gracias a un dinamismo que le permite trasformar las ceñudas contradicciones en divertidas paradojas, cosa que no es posible en un lenguaje tan formal como quiere ser y como tiene que ser el de la matemática formalista

Pero la cosa no ha parado aquí, sino que a estos matemáticos formalistas se les ha ocurrido que, siendo posible la tal curvatura de los planos, los triángulos que se formen con las rectas trazadas en ellos sumarían en sus ángulos más de dos rectos o menos según los casos. Fig. 4.

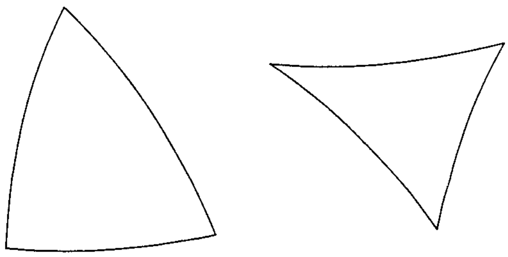


Figura 4

Esto, según se cuenta, llevó al gran matemático Gauss a medir los ángulos de un gran triángulo formado por tres rayos luminosos proyectados desde tres puntos situados en tres montes muy alejados. Los resultados fueron decepcionantes, pues la suma de los tres ángulos de ese triángulo era de dos rectos, como está mandado.

La cosa, sin embargo, llega hasta nuestros días, incluso implicando en ella a la astrofísica. Así, en la primavera del 2000, los medios de comunicación nos dieron cuenta del llamado proyecto Boomerang. Según las mediciones hechas gracias a un globo dotado de los más modernos medios, la conclusión a la que han llegado los científicos es que el universo no es curvo, sino que es plano, lo que quiere decir que responde a la geometría que Euclides enunció hace veintitrés siglos, no a las no-euclídeas del siglo XIX. Vamos, que el universo es mucho más serio de lo que suponían algunos matemáticos.

Traducido esto a un lenguaje que todos podamos entender, lo que parece claro es que en el universo el espacio no deforma ni modifica la dirección de los rayos de luz, que sería la más perfecta materialización de una recta. Y no los puede deformar porque, según el experimento Michelson-Morley finales del siglo XIX y al que ya nos hemos referido, se niega la existencia del éter, lo que es tanto como decir que carece de toda materialidad, como ya hemos dicho también, lo que hace imposible cualquier clase de deformación de los objetos que entren en él.

Por otra parte, si aceptamos que el plano es curvo, ya nos hemos salido del plano y hemos entrado de una manera subrepticia en el espacio, pues para que un plano pueda ser curvo ha de tener cuatro puntos no en el mismo plano. Estas geometrías entran de tapadillo en el espacio, lo que ha resultado funesto para las matemáticas, pues eso se ha convertido en un muro para que la verdadera ciencia del espacio se hubiese podido desarrollar con naturalidad como yo he hecho, y no de una manera tan forzada y artificial como han de hacerlo estas geometrías llamadas no-euclídeas.

8. La encrucijada de Fermat: se da un vuelco a la historia de las matemáticas

El formalismo matemático tiene sus más modernas raíces en la filosofía de Descartes (1596-1650) y su más histórica consagración en el conocido teorema de Fermat (1601-1665). Este hombre posiblemente comenzaría por la ecuación de tres cubos, que es la que está sugerida por la de los tres cuadrados. Esta ecuación ya se la habían planteado los árabes: el médico y gran sabio Avicena la cita en el siglo XI como insoluble. Ante esta situación, a Fermat le quedaban dos salidas: una horizontal y otra vertical. Ésa fue la encrucijada. Y Fermat optó por la salida vertical: pasó de la ecuación de tres cubos a la de tres cuartas potencias. Mas, como vio que tampoco ésta tenía soluciones, siguió hacia arriba y generalizó en su célebre teorema: "No hay tres números enteros tales que $x^n + y^n = z^n$, siendo n entero y mayor de 2".

¿Por qué Fermat, al estar convencido de que la ecuación de tres cubos no tenía soluciones, pasó a la de tres cuartas potencias y no a la de cuatro cubos? Sin duda le hubiese sido facilísimo encontrar las soluciones de ésta por simple tanteo: $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. ¿Por qué no lo hizo así? ¿O es que lo hizo y se lo calló, siendo esa la prueba que dijo haber encontrado y que no le cabía en el pequeño margen de la *Aritmética* de Diofanto en que escribió su teorema? Claro que, de ser así, una cosa tan sencilla, sí le hubiese cabido. Yo supongo más bien que ni siquiera se le ocurrió plantearse la solución de una ecuación de cuatro cubos, y no se le pudo ocurrir si se había leído el *Discurso del método* de Descartes, al menos la tercera de las cuatro reglas que propone: "Conducir con orden mis pensamientos comenzando por los objetos más simples y fáciles de conocer para ascender poco a poco, como por grados, hasta el conocimiento de los más compuestos; e incluso suponiendo un orden entre los que no se preceden naturalmente unos a otros" (A. T. 18).

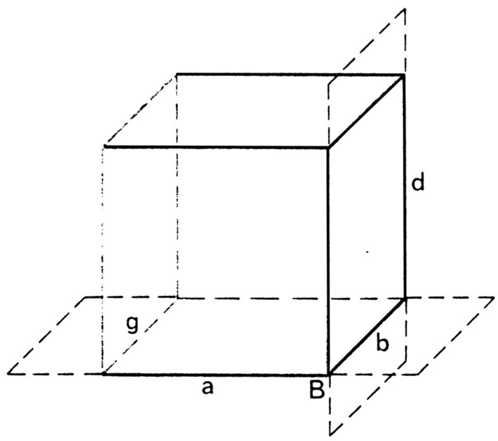
La dificultad era ésta: ¿si la ecuación de tres cubos no tiene soluciones, en qué cabeza cabe que puede tenerla una de cuatro? Y el hecho es que las tiene. Cuando a mí se me ocurrió semejante *sin sentido*, ya conocía la filosofía de Descartes, incluso había leído esta regla, pero yo siempre he entendido que las reglas son para saltárselas, al menos si es que se quiere progresar. A esto puedo añadir que, de acuerdo con las investigaciones que hice con motivo de mi rechazada Tesis Doctoral, fue Leonardo Éuler (1707-1783) el que por primera vez se planteó la solución de la ecuación de cuatro cubos, aunque, en lugar de hacerlo por tanteo como yo, hizo un desarrollo algebraico muy complicado (*Introductio in analysin infinitorum*, Lausanne, Apud Marcum-Michaelem Bousquet et Socios, 1748, t. II, p. 202).

La encrucijada de Fermat se podía resumir así: subir de grado o aumentar el número de cubos. Él optó por subir de grado, mas no para buscar soluciones, que no las había, sino para demostrar que no era posible encontrarlas. Y este planteamiento fue la gran tentación para el formalismo matemático, el Everest inaccesible e ilusionante al que han apuntado durante más de tres siglos los matemáticos más tesonudos, hasta que a finales del siglo XX el inglés Andrew Wiles, según parece, ha conseguido alcanzar la cota más elevada, la de su demostración. Se trata, por supuesto, de una demostración formal, la prueba por reducción al absurdo, la única posible para un enunciado negativo y referido a conjuntos infinitos. El método, al menos en este caso, se ha apoderado del objeto, dejándolo sin realidad. ¿Pero es lícito generalizar afirmando que el método matemático terminará por apoderarse de todos sus objetos, incluido el espacio, hasta dejarlos sin realidad? Lo primero que hay que observar es que el enunciado de Fermat es negativo, y lo negativo nunca podrá tener realidad, nunca podrá ser objeto de una intuición, sino únicamente de un discurso. Por lo tanto del éxito del método en el teorema de Fermat, que es un enunciado negativo como decimos, no se puede seguir que vaya a tenerlo también en cualquier objeto del que se puedan hacer enunciados positivos: los enunciados sobre el espacio, por ejemplo.

No estaría de más plantearse finalmente cuál hubiese sido la historia de las matemáticas si a Fermat, en lugar del camino que siguió, se le hubiese ocurrido solucionar la ecuación de cuatro cubos y pensar, como yo he hecho, que con ella se podían hacer desarrollos geométricos en el espacio de manera similar a como con la de tres cuadrados se pueden hacer en el plano: la historia hubiese sido otra.

En conclusión, lo que yo he hecho ha sido volver las matemáticas a más de tres siglos y medio atrás, a la encrucijada de Fermat, al momento en que él, no sabemos si por error o de forma calculada, cogió el camino menos científico, el más formal.

Segovia, mayo 2006



Paralelas