Las Funciones

Félix García Merayo

Vicepresidente de ACTA

Revista Digital de ACTA

2015

Publicación patrocinada por

CEDRO

Las Funciones

Los honores deshonran; el título degrada;
la función embrutece.

Gustavo Flaubert

INTRODUCCIÓN

La palabra **función** proviene del latín clásico *functio*, cuyo significado es *ejecución*, *cumplimiento*, *desempeño* y del bajo latín jurídico con el significado de *servicio público*, *oficio*. Aparece por vez primera en matemáticas a finales del siglo XVII, aunque el concepto en sí y su uso se remonta a tres mil setecientos años atrás.

Esta palabra se da con frecuencia en la vida común y con significados variados. Puede designar, por ejemplo, un conjunto de operaciones ejecutadas por una serie de órganos tendentes a obtener un cierto resultado. Así, hablamos de las funciones de nutrición, cardiaca, de relación, de reproducción, etcétera. También nos referimos a veces con esa palabra al papel jugado por un determinado elemento de un conjunto: función desempeñada por una válvula en el motor de un vehículo; las funciones que posee un robot de cocina. Se habla también del papel y características del ejercicio de un cargo: acumular funciones, entrar en función, reconducir su función, relevar de una función.

Una función puede designar el conjunto de propiedades concernientes a un sistema capaz de accionar. Así, la función gramatical, por ejemplo, se refiere al papel que juegan las palabras dentro de una frase en relación con otras palabras. Otro ejemplo: la función pública agrupa al conjunto de agentes, los funcionarios, que están al servicio público.

Función puede tener también el sentido de "papel jugado". Eso se da en política, en medicina, en mecánica, en arquitectura o en sociología, entre otras situaciones.

Por último, encontramos esa palabra en numerosas expresiones: hacer "la función de", en el sentido de reemplazar; "función vital", significando que juega un papel esencial.

Es a finales del siglo XVII cuando la palabra se utiliza con un sentido matemático: indica, como veremos más adelante, la relación entre dos cantidades.

LAS FUNCIONES EN LA VIDA COTIDIANA

Expresiones tales como *ser función de*, *en función de*, indican siempre una relación de dependencia que como veremos, se aproxima a la definición matemática del concepto de *función.* Las funciones se esconden muchas veces en lo que llamamos *índices* los cuales permiten relacionar entre sí factores significativos. Veamos algunos ejemplos.

El índice de precios al consumo, IPC, es un instrumento de medida de la inflación de un país. Sirve, entre otras cosas, para estimar, entre dos periodos de tiempo dados, la variación de los precios, de los servicios y de los bienes de consumo.

El índice de masa corporal, IMC, estima la corpulencia de una persona en función de su masa corporal m y de su talla t en la forma, IMC = m/t^2. Así deduciremos si la persona es obesa, está desnutrida, tiene exceso de peso, etcétera.

El GPS, *Global Positioning System*, es otro ejemplo. Este sistema posee numerosas funciones ligadas a algoritmos sofisticados que van más allá de la simple búsqueda de un itinerario. Por ejemplo, el usuario puede desear evitar un peaje, una carretera donde ha ocurrido un accidente o tomar la ruta más corta entre un origen y un destino.

En ocasiones existe una analogía entre *función* y el propio sentido matemático de la palabra. Cuando eso sucede es necesario que se de una relación de dependencia. Un caso claro acontece con el precio de un artículo en la temporada de saldos. En tales ocasiones, los precios dependen no sólo de la reducción aplicada a los artículos en venta sino también del precio inicial. Es decir, se trata de funciones de dos variables aunque el comprador no suele fijarse nada más que en la reducción, en la rebaja y, por tanto, el peligro está en olvidar ese precio inicial que tenía el artículo antes de la misma.

Veamos ahora un ejemplo más cercano a la física. Supongamos que circulamos a una velocidad constante v y que nos encontramos con un obstáculo imprevisto en la carretera. Entonces ocurrirán dos cosas: darnos cuenta del peligro, lo que conlleva un tiempo de reacción desde que avistamos el obstáculo y nos preparamos para evitarlo; en segundo lugar, aparecerá el instinto de frenar para no impactar con el mismo, cosa que no es inmediata. La distancia recorrida hasta que reaccionamos es función de la velocidad v del vehículo. Y la distancia de frenado también depende de esa velocidad. Es decir, ambas son función de v. En el gráfico adjunto se representan las dos funciones. La distancia de reacción en función de la velocidad es una línea recta y la distancia de frenado, una curva conocida como parábola.

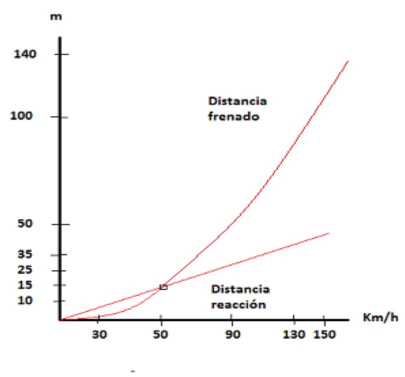

Figura 1. Distancias de reacción y de frenado en función de v.

Añadir que el tiempo de reacción de nuestro cerebro ante un imprevisto es aproximadamente de un segundo. Si circulásemos a una velocidad de 60 km/h, nuestro vehículo recorrería 17 metros antes de comenzar la deceleración. Por otra parte, la distancia de frenado es función de la velocidad a la que circulemos y, más concretamente, al cuadrado de esa velocidad.

En el siguiente gráfico se muestra la relación existente entre la velocidad *v* de un móvil expresada en metros/segundo y el tiempo *t* en segundos. En ella se observan distintas circunstancias de ese movimiento que vamos a analizar.

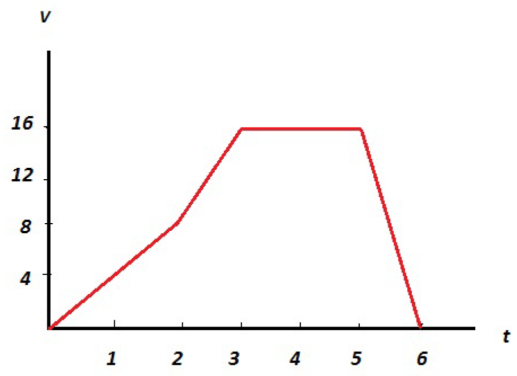

Figura 2. La velocidad de un móvil función del tiempo.

1. Cuando han transcurrido 2 segundos, t=2, la velocidad es de v=8 m/s.

2. Hasta el segundo 2, a medida que aumenta el tiempo aumenta proporcionalmente (linealmente) también la velocidad.

3. Entre los segundos 2 y 3, también hay un aumento de velocidad pero en este caso la velocidad aumenta más rápidamente que entre los segundos 0 y 2 porque la línea roja representativa de la función tiene ahora una pendiente más acusada.

4. En el segundo 3, la velocidad se mantiene constante hasta el 5, v=16 m/s. En física, cuando la velocidad es contante, se dice que tal movimiento es uniforme.

5. Entre los segundos 5 y 6, la velocidad es decreciente hasta pararse el móvil en el segundo 6, que es el tiempo total que el móvil ha estado en movimiento.

Una vez más vemos con este ejemplo que las funciones son una pieza clave para entender y representar situaciones de la vida. En este caso se trataba de representar la forma en que un móvil se mueve.

El empleo de las funciones se da en muchas ramas como la literatura o la gramática (1803), en mecánica (1835), en química (1865), en las ciencias y en la técnica, en la estadística. Sólo daremos algunos ejemplos. En electricidad, tenemos varios: la *ley de Coulomb* que mide la fuerza de atracción o repulsión entre dos cargas en función de dichas cargas; la intensidad de un campo eléctrico que depende del valor de la carga eléctrica que lo crea; la *ley de Ohm* que relaciona la resistencia de un circuito con la diferencia de potencial entre los extremos del conductor y la intensidad de la corriente que circula por el mismo.

En química son también funciones las siguientes. La *ley de Boyle-Mariotte* representada por una gráfica parabólica que establece la proporcionalidad inversa entre las presiones y los volúmenes de un gas cuando se mantiene constante la temperatura. La *ley de Gay-Lussac* que nos dice que, siendo constante el volumen de un gas, las presiones sobre el mismo son directamente proporcionales a las respectivas temperaturas.

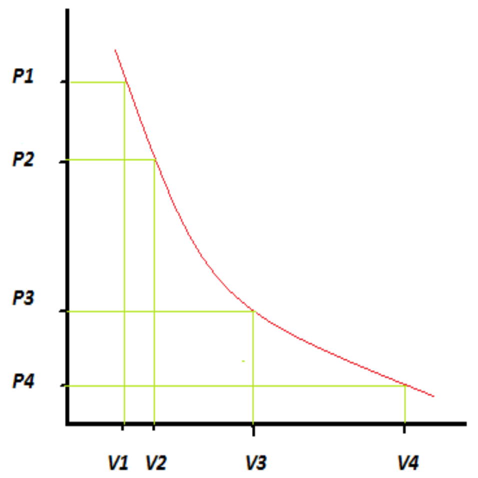

Figura 3. Representación gráfica de la ley de Boyle-Mariotte

UNAS PRIMERAS DEFINICIONES

Una definición matemática de función, aunque naif, podría ser ésta: una función *f* es como una caja negra que oculta un proceso tal que partiendo de un dato número *x*, *argumento*, perteneciente a un conjunto A que se sitúa en el eje coordenado horizontal, le hace corresponder un único número *y* de otro conjunto B, que llamamos su *imagen* situada en el eje coordenado vertical. Este concepto suele escribirse así:

$$y=f(x) \quad \text{para significar} \quad f: x \rightarrow y$$

Desde los babilonios hasta Euler pasando por Newton nadie se ha puesto de acuerdo para formalizar esta definición de manera adecuada. Hemos de esperar al siglo XX para encontrar una definición coherente y formal así como sus propiedades fundamentales y los teoremas sobre los que se apoya. Lo veremos más adelante al tratar de la historia del concepto función.

A partir de la definición anterior podemos clasificar ahora las funciones en categorías.

Una función *afín*, tiene la expresión $f: x \rightarrow ax + b$, en la que *a* y *b* son dos números reales que, mediante un proceso de multiplicación y suma, hacen corresponder a una variable *x* el número $ax + b$. Al hacer el gráfico de tales funciones sobre los ejes coordenados nos resulta una línea recta.

Cuando en la expresión anterior es b=0, su gráfica es también la de una recta pero ahora pasa por el origen de coordenadas, en cuyo caso hablamos de función *lineal*. El gráfico de la figura 1, correspondiente a la distancia de reacción, es una función lineal.

Si nos fijamos en la misma figura pero en la parábola de la distancia de frenado, veremos que a una pequeña variación de la velocidad le corresponde una pequeña variación de la distancia recorrida durante el frenado. Llamamos *continua* a este tipo de función: la podemos dibujar sin levantar el lápiz del papel, no posee tramos separados. Las funciones lineales y afines también son continuas. La parábola de la que estamos hablando tiene una expresión general tal como

$$f:x \rightarrow ax^2 + bx + c$$

que se engloba en las llamadas funciones *polinómicas*. En este caso se trata de un polinomio de segundo grado y por tanto de una función *cuadrática*. En la gráfica de la distancia de frenado que es una parábola que pasa por el origen de coordenadas, sería c=0. En general, una *función polinómica* es una función que está definida mediante un polinomio de un cierto grado. Un ejemplo de función cúbica sería,

$$f:x \rightarrow 3x^3\text{-}6x^2\text{+}2x\text{-}8$$

Todas las líneas rectas de la figura 2 son funciones afines. Pero vamos a distinguir. El primer tramo del segundo 0 al 2, es una función propiamente lineal porque pasa por el origen de coordenadas; el tramo entre los segundos 2 y 3, es una función afín; afín también es entre 3 y 5, pero en este caso se trata de una *función constante* e igual a 16; el tramo último vuelve a ser afín. En cualquier caso, los sucesivos tramos que forman la función constituyen todos ellos una función continua.

A la propiedad de continuidad le vamos a añadir ahora otra propiedad fundamental como es la de función *diferenciable*. Una función continua es además diferenciable si en cada uno de los puntos que forman su línea representativa sólo puede tazarse una tangente a la misma. En otro caso, será continua pero no diferenciable. Por lo tanto, la tangente a la curva representativa de una función sirve de indicador para definirla o no como diferenciable.

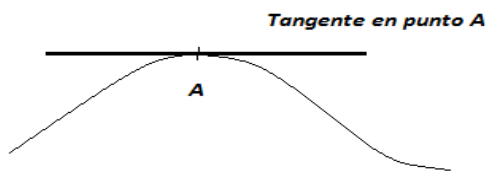

Figura 4. Función continua y diferenciable.

La figura 4 muestra una función continua y uno de sus puntos cualesquiera *A* en el que sólo es posible trazar una tangente, tal como se indica. Se trata de una función diferenciable.

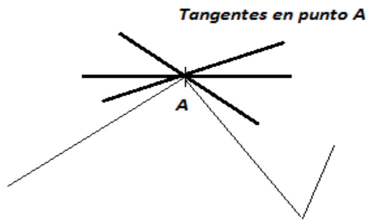

Figura 5. Función continua y no diferenciable.

Sin embargo en la figura 5 se muestra otra función continua. Pero en el punto *A* es posible trazar tantas tangentes como se quiera. En el dibujo sólo se han trazado tres tangentes de todas las posibles. Es una función continua pero no diferenciable.

Supongamos ahora que un intervalo [*a*,*b*] del eje coordenado horizontal se subdivide en una serie de intervalos más pequeños. Podemos entonces definir una función *f* que sea afín sobre cada subintervalo, en cuyo caso decimos que tenemos una función *afín por trozos*. Si además la función *f* fuera constante en cada subintervalo, se trataría de una función *en escalera*.

Un ejemplo de función en escalera se da en el caso de las retenciones del IRPF. Para el año 2015, el gobierno ha publicado los tramos de retenciones sobre la base imponible. Se trata de una función en escalera de cinco tramos tal como se indica en la figura 6. En el eje vertical se representan los porcentajes de retenciones totales en función de la base imponible.

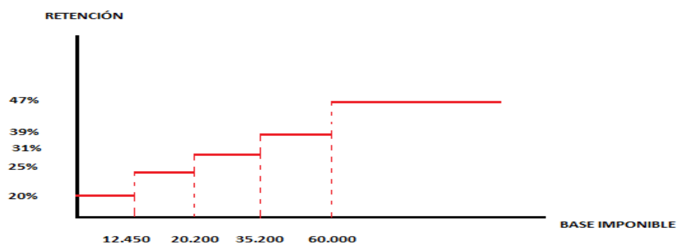

Figura 6. Función en escalera.

Existe otra categoría de funciones definidas por el príncipe de las matemáticas Carl Friedrich Gauss (1777-1875) allá por el año 1811. Se trata de las *funciones analíticas*. Pero para adentrarnos en su teoría, aunque sea de forma sencilla, debemos definir, en primer lugar, los *números complejos*.

Figura 7. F. Carl Gauss.

Gauss determinó que las soluciones de toda ecuación algebraica eran números de la forma *a+bi*, siendo *a* y *b* números reales que corresponden a las distancias positiva, nula o negativa, medidas desde un punto fijo O sobre dos líneas rectas dadas tales como los ejes OX, OY de la geometría analítica de Descartes. La cantidad *i* es la raíz cuadrada de -1. Gauss fue el primero en dar una descripción coherente de esos números y en interpretarlos como notación de los puntos de un plano, tal como hacemos hoy en los textos elementales del álgebra.

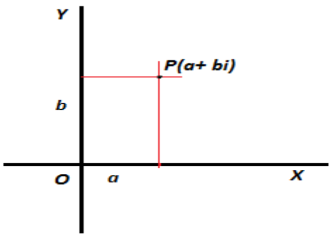

Figura 8. Diagrama cartesiano para la representación de los números complejos.

Gerolano Cardano (1501-1576), médico y matemático italiano, fue el primero que se encontró con los números complejos en el siglo XVI al tratar de calcular las soluciones de una ecuación algebraica de tercer grado, pero Cardano no les vio utilidad alguna a esos nuevos números.

También el matemático italiano Rafael Bombelli (c. 1526-1572) fue el primero en describirlos y hacer cálculos con ellos, es decir, con números que utilizan esa unidad imaginaria que definió Gauss, $i = \sqrt{-1}$, y que éste denominó *i* por corresponder a la primera letra de la palabra latina *imaginarius*. El nombre de *imaginarios* parece deberse a René Descartes. El diagrama *cartesiano* de la figura 8 lleva el nombre de diagrama de Argand, en memoria del suizo Roberto Argand (1768-1822) que lo describe en su publicación *Ensayo sobre una manera de representar las cantidades imaginarias en las construcciones geométricas*.

Las coordenadas cartesianas de un punto *P* son (*a,b*) y *P* viene marcado por $a+bi$. Luego a todo punto del plano le corresponde precisamente un número complejo; los puntos o números situados sobre OX se denominan números *reales* y los situados sobre OY son los *imaginarios puros*. El número complejo es, por tanto, una combinación de ambos.

Con los números complejos se pueden realizar las operaciones propias del álgebra: suma, resta, multiplicación, división, etcétera, aunque las reglas que siguen algunas de estas operaciones no son sencillas.

Para abreviar, indicaremos un número complejo cualquiera $x+yi$ por z, es decir $z= x+yi$. Cuando x e y toman todos los valores reales posibles, el punto z recorrerá todo el plano. Además, una expresión que incluya z, tal como z^2, $1/z$, etcétera y que tome un valor definido *único* al asignar un valor a z, se denomina *función uniforme* de z. Aparece de nuevo el concepto de función pero ahora aplicado a los números complejos. Indicaremos tal función por $f(z)$

$$f(z):(x,y) \rightarrow x+yi$$

De todas maneras, es difícil explicar que un descubrimiento tan importante (los números complejos) que va a fecundar toda la teoría de funciones de variable compleja, cuyo creador es el matemático francés Augustin Louis Cauchy (1789-1857), haya podido pasar desapercibido tantos años.

Propongamos ahora un ejemplo sencillo para mostrar el mecanismo que siguen este tipo de funciones. Si fuera, por ejemplo, $f(z)=z^2$, con $z=x+yi$, entonces, sería

$$f(z)=(x+yi)^2=x^2+2xyi+y^2i^2=x^2-y^2+2xyi$$

ya que $i^2=-1$.

Por tanto, al asignar unos valores concretos a x e y, se producirá otro valor para z y, por tanto, también para la función $f(z)$. Por ejemplo, $x=2$ e $y=3$ producen como consecuencia, $z=2+3i$. Y con ello, la función $f(z)=z^2=(2+3i)^2=-5+12i$.

Más adelante haremos uso de este tipo de funciones de variable compleja para adentrarnos en la teoría de los fractales.

Podemos definir ahora las *funciones analíticas*. Se trata de funciones que son diferenciables en todos sus puntos representantes de la variable real x o de la variable compleja z.

Figura 9. J. B. J. Fourier.

El matemático J. B. Joseph Fourier (1768-1830) hablaba de una conexión entre las matemáticas y el sonido cuando descubrió que todos los sonidos, sean instrumentales, vocales o de cualquier forma de vibración, se relacionaban con ondas como las que se producen en el agua, en la tierra o en el aire. Descubrió que los sonidos podían describirse mediante funciones especiales que llamamos *funciones periódicas*. Son funciones que repiten su perfil a intervalos iguales. Las funciones trigonométricas *seno* o *coseno*, son dos ejemplos de este tipo de función.

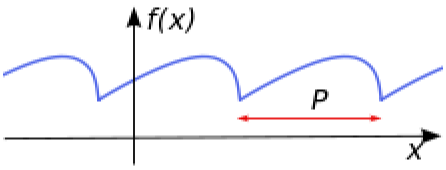

Figura 10. Diagrama de una función periódica de período p.

VIAJE EN EL TIEMPO CON LAS FUNCIONES

Hace unos cuatro mil años, los babilonios ya se interesaban por los números en general y, sobre todo, por la evolución simultánea de ciertas cantidades. Fueron capaces de construir tablas con números enteros y sus correspondientes cuadrados. Por lo tanto, tenían ya una idea implícita de la función que asociaba x con su cuadrado x^2. Y no sólo eso; construyeron tablas, siempre sexagesimales, de números recíprocos, de raíces cuadradas y cúbicas, de cubos. Esas tablas las utilizaban en astronomía para el cálculo de efemérides del sol, de la luna y de los planetas.

Más tarde, los griegos, que tanto han influido en las civilizaciones posteriores, se aproximaron al concepto de función. En el siglo III a.C., Euclides en su obra *Elementos* se interesaba por la proporcionalidad entre cantidades: estaba anunciando las funciones lineales. A los pitagóricos se les atribuye la determinación de leyes simples de la acústica en las que se ponía de manifiesto la interdependencia de cantidades físicas como la altura de un sonido emitido por una cuerda tensada y la longitud de la misma.

El obispo, matemático y astrónomo francés, Nicole Oresme (c. 1330-1382) pone su atención en la variación de cantidades continuas, como el espacio recorrido por un móvil sobre una trayectoria recta. Se trata de una primera aparición de las representaciones gráficas de funciones. Por ello, Oresme escribía: *Cada cosa medible, con excepción de los números, puede imaginarse como una cantidad continua.*

Oresme descubrió además que el área contenida bajo una gráfica representativa de la velocidad de un móvil en función del tiempo era equivalente a la distancia recorrida. Por ejemplo, en el grafico de la figura 2, la distancia recorrida vale

$$(2x8)/2 + (1x8)/2 + 2x16 + (1X16)/2 = 52 \text{ metros}$$

El estudio del movimiento fue un problema de suma importancia para los científicos del siglo XVII y ello influido por los descubrimientos del célebre astrónomo, matemático y físico Galileo Galilei (1564-1642) y del alemán Johannes Kepler

(1571-1630), figura clave de las matemáticas y la astronomía. Tal es así que algunas funciones estudiadas en ese siglo, antes de ser consideradas como tales, se tomaron como líneas curvas, siempre expresadas en términos de movimiento de alguna clase.

Galileo, basándose en los estudios de Oresme, construye la gráfica de la velocidad correspondiente a un movimiento uniformemente acelerado en función del tiempo. Obtuvo importantes resultados en astronomía y en física. En general, Galileo expresó sus investigaciones y los resultados de las mismas utilizando, una vez más, el lenguaje de las proporciones.

Un elemento fundamental de este periodo es la nueva concepción de las matemáticas como lenguaje apropiado para expresar las realidades físicas de la naturaleza y que Galileo advierte en 1623 en *El Saggiatore*: *El gran libro del universo está escrito en lenguaje matemático.*

A principios del siglo XVII, Kepler enuncia sus tres célebres leyes físicas que describen las órbitas de los planetas lo que va a despertar el interés de todos aquellos que se ocupan de las matemáticas en lo referente al problema del cálculo y estudio de trayectorias en general y la de los planetas en particular. Esas leyes le llevaron a estudiar las líneas cónicas, elipse, hipérbola y parábola, funciones especiales que dependen de dos variables. En el estudio de las cónicas también debemos mencionar a Blas Pascal (1623-1662).

Figura 11. Blas Pascal.

Pierre de Fermat (c. 1601-1665) célebre por su tratado sobre la teoría de números,

Figura 12. Pierre de Fermat.

descubre un método para encontrar los valores *máximo* y *mínimo* de una función algebraica, es decir, los valores con la mayor o menor ordenada, respectivamente.

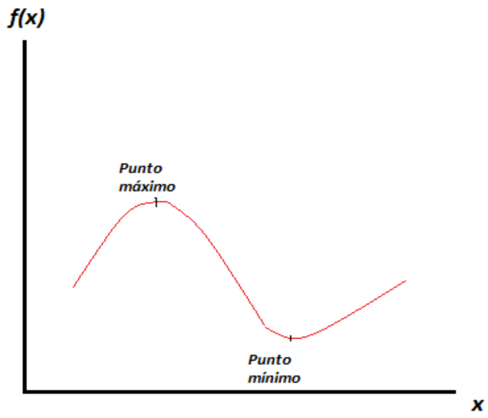

Figura 13. Máximo y mínimo de una función f(x). Kepler y Fermat.

René Descartes (1596-1650) es notorio por la invención de la geometría analítica, parte de las matemáticas que se encarga de estudiar las propiedades de las figuras geométricas utilizando los recursos del álgebra. Esta geometría es el marco ideal para representar y estudiar funciones o curvas en general. En su tratado de *Geometría* aparecido en 1637, Descartes distingue entre curvas geométricas y curvas mecánicas, observando que las primeras son funciones de dos variables x e y ligadas por una ecuación algebraica del tipo $F(x,y)=0$. Actualmente llamamos curvas algebraicas a este tipo de ecuación. De nuevo aparece la dependencia funcional entre cantidades variables, x e y, en el sentido de que una de ellas permite determinar la otra.

Figura 14. René Descartes.

Entramos en el siglo XVII y por consiguiente en la era del *análisis matemático*, teoría inesperada para los tiempos que corrían, análisis que se descompone en dos partes: el *cálculo diferencial* y el *cálculo integral*. El nombre del primero deriva de *differencialis*, es decir, tomar diferencias, y el del segundo de *integralis*, suma de partes. Hoy entendemos por ello, *medición del cambio* y *suma de áreas*, respectivamente. La diferenciación y la integración son operaciones inversas una de la otra.

Aparece de nuevo en el panorama el concepto de función que se va construyendo y afinando progresivamente mediante la utilización de metáforas matemáticas mientras se estudia y profundiza en el estudio del *cálculo*. Este esfuerzo de sistematización es obra de dos grandes: del hombre de ciencia inglés Isaac Newton (1642-1727) y del jurista, filósofo y político alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Ellos trabajan de forma independiente, aunque con alguna querella que otra en algunos momentos, por entender robo de paternidad en ciertas teorías, pero ambos son inventores de algoritmos sencillos que descubren las dependencias entre problemas aparentemente aislados y diferentes. Consiguen que el análisis matemático llegue a ser una rama autónoma e independiente de la geometría.

Newton se dedicó principalmente al estudio de las cantidades que variaban de forma continua con el tiempo (otro ejemplo de dependencia funcional) como podía ser, en mecánica, la trayectoria seguida por un móvil en función del tiempo empleado en el recorrido. Aunque es verdad que él no emplea en el estudio la palabra función sino que habla de *cantidad fluente* y de su tasa de variación, *fluxion*. Hoy diríamos que el espacio recorrido sería una *cantidad fluente*, mientras que la velocidad sería una *fluxion*. Esta teoría aparece en 1687 contenida en una de sus obras sobre mecánica titulada *Philosophiae naturalis principia matemática*.

El término función parece haberlo empleado por primera vez Leibniz a finales del siglo XVII aunque no exactamente en el sentido matemático en el que actualmente se utiliza hoy día sino más bien en un contexto geométrico, concretamente para estudiar curvas planas. Así podemos leer que Leibniz, para el estudio de una curva plana, *consideraba diversos segmentos ligados a ella, tales como el segmento horizontal que enlaza con el eje vertical de la propia curva*. Y añadía que *esos segmentos responden a una cierta función para la curva considerada.* Y es precisamente a esos segmentos a los que da el nombre de *funciones*.

En un intercambio de correspondencia entre Leibniz y el suizo Jean Bernoulli (1667-1748), hermano menor de Jacques Bernoulli, se dice que lo importante no son los segmentos aludidos sino más bien las relaciones existentes entre ellos. Y es desde este momento cuando empieza a utilizarse el término función en un sentido nuevo y ya más actual: una función expresa la dependencia de una cantidad en relación con otra. Bernoulli establece en 1718 la siguiente definición: *Se llama función de una cantidad variable una cantidad compuesta, de cualquier manera que sea, de esa cantidad variable y de otras constantes.* E incluso establece la notación Φx para indicar tal concepto, es decir, Φ es función de x. Nada se precisa sobre cuál es la *composición* a la que Bernoulli alude.

Hasta el siglo XVIII el análisis matemático se venía ocupando únicamente de aquellas curvas aparecidas en los problemas de cinemática o de geometría. Los trabajos del suizo Leonhard Euler denotan, sin embargo, el principio de una *desgeometrización* del análisis matemático reservando en una de sus obras un lugar explícito para abordar el concepto de función cuando escribe: *funciones de cantidades variables que son expresiones analíticas compuestas, de cualquier forma que sea, de cantidades variables, de números y de cantidades constantes.* Él es el primero en utilizar la notación moderna, que ya hemos escrito aquí, $f(x)$ para indicar con ella la imagen de x producida por la función f.

En el siglo XVIII se plantearon dos problemas de la física que precisaban una revisión del concepto de función tenido hasta entonces. El primero de ellos se refiere a las cuerdas vibrantes, problema en el que intervienen el suizo Leonhard

Euler (1707-1783), el holandés-suizo Daniel Bernoulli (1700-1782) y el francés d'Alembert (1717-1783). Se trataba de describir la posición de los puntos de una cuerda vibrante al ser pulsada estando sujeta por sus dos extremos, como sucede, por ejemplo, con las cuerdas de una guitarra. Con ello se puso de relieve que una función no tiene por qué ser definida o expresada por una expresión única.

El segundo problema lo plantea Fourier (1768-1830) en su *Teoría analítica del calor* estudiando la distribución del calor en un cuerpo lo que da lugar a unas ecuaciones matemáticas cuya descripción sale del contexto de este artículo. Sólo añadir que Fourier encuentra una solución al problema que se materializa en una suma de infinitos sumando todos ellos formados por las funciones periódicas seno y coseno.

Dando un salto en el tiempo, allá por el año 1830, aparece en la escena de las matemáticas y, en concreto, en el de las funciones, Lejeune Dirichlet (1805-1859) notable porque en el campo que nos ocupa introduce una nueva función d que lleva su nombre y que define así: d vale 1 para todo valor racional (fraccionario) de la variable independiente x; vale 0 para todo valor irracional (x bajo el signo de raíz) de la variable x. Tal función d es un primer ejemplo de una función que no está definida por una expresión analítica o por una curva y su representación gráfica no se puede construir explícitamente. Además, Dirichlet nos dejó una nueva definición de función: y es función de una variable x que está definida en un intervalo $[a,b]$ del eje OX, si, para todo valor que tome x sobre ese intervalo, le corresponde otro bien definido a la y.

Richard Dedekind (1831-1916), el matemático, lógico y filósofo alemán Gottlob Frege (1848-1925), el matemático y físico italiano Vito Volterra (1860-1940) y, más recientemente, la asociación de matemáticos conocidos como Bourbaki, nos han ido proporcionado nuevos estudios sobre las funciones y nuevas definiciones sobre las mismas.

Ponemos fin aquí a esta historia que como hemos visto es tan antigua como las matemáticas mismas.

LAS FUNCIONES QUE SE REPITEN UNA Y OTRA VEZ

El término *fractal* (del latín *fractus*, roto, fraccionado) no existía en el lenguaje matemático antes del año 1960. Esos objetos eran considerados como anomalías matemáticas. Incluso a finales del siglo XIX los matemáticos, que ya conocían algo sobre su generación, se referían a ellos como *monstruos* de manera que la formación de tales perfiles era algo intuitivo. Veremos que no es precisamente la intuición el origen de su gestación. Los fractales aparecieron como algo paradójico dentro del campo de las funciones. Unos eran funciones continuas pero no diferenciables; otros contenían un área finita pero dentro de perímetros infinitos e incluso otros podían llenar completamente el plano.

Desde el año 1860 han sido muchos los matemáticos que se han ocupado de explorar la teoría de los fractales: el alemán George Cantor (1815-1918), el matemático sueco Helge von Koch (1870-1924), el alemán Karl Weierstrass (1815-1897), Giuseppe Peano (1858-1932), Sierpinski y muchos otros. Unos trabajaron sobre la teoría de la dimensión, otros sobre la teoría de la iteración, como Julia y el francés Fatou (1878-1929), y sobre turbulencias y autosemejanza, como el inglés de la Royal Society, Lewis Richarson (1881-1953).

Figura 15. Benoit Mandelbrot.

El matemático Benoit Mandelbrot (1924-2010), quien bautizó con el nombre de fractales a estos elementos, fue alumno precisamente del matemático francés Gaston Julia (1893-1978) en 1940 en la Escuela Politécnica de París. Durante su periodo profesional en los laboratorios Bell, hizo un gran descubrimiento sobre los fractales y su conexión con los fenómenos de la naturaleza al observar que la distribución de los errores telefónicos tenía que ver con los *conjuntos de Cantor*. No entraremos aquí en su análisis, sólo añadir que dejó constancia de ese descubrimiento en su publicación titulada, *The Fractal Geometry of Nature*, *La geometría fractal de la naturaleza*, en la que apuntaba que los fractales podían utilizarse para describir ciertos fenómenos naturales. Desde ese momento, fractales y naturaleza forman un dúo inseparable. Encontramos estructuras fractales al contemplar las ramas de los árboles, las hojas de una planta, las nubes del cielo, las ramificaciones de los vasos sanguíneos. Se han escrito miles de artículos y libros, se han impartido cursos y conferencias y se han organizado concursos en diversos países del mundo. Todo ello alrededor de los fractales y de la naturaleza. Hoy día, los fractales se han convertido en un verdadero arte.

Fue un familiar próximo a Benoit, Szolem Mandelbrojt, el que le animó a interesarse por los trabajos de Julia y Fatou pero habría de esperar hasta los años 1970 para dedicarse de lleno a ello. En aquel momento ya era una realidad la utilización de la potencia de cálculo de los ordenadores de IBM para trabajar en problemas iterativos y poder también representar gráficamente los resultados.

En marzo de 1980, Mandelbrot experimentó con un ordenador del Centro de Investigación de IBM en el laboratorio que esta compañía tenía en Yorktown Heights, estado de Nueva York. Con la ayuda de una impresora para la salida de resultados, obtuvo lo que se conoce como *conjunto de Mandelbrot*, imagen formada por puntos blancos y negros y que constituye la primera representación visible de un fractal.

Se hace necesario ahora, abandonar la historia y analizar qué es un fractal y cómo se genera. Pero para inicio, una definición sencilla: un fractal se construye tomando un determinado objeto, por ejemplo un cuadrado o cualquier otra figura, e incluso un determinado número, objeto al que se le aplica después una regla o algoritmo para construir así un nuevo objeto. A ese objeto obtenido se le aplica de nuevo la misma regla y el proceso se repite una y otra vez. Tal algoritmo recibe el nombre de *iteración*. Y el resultado puede ser un fractal geométrico, como el *copo de nieve* de Koch, el triángulo de Sierpinski o la curva de Peano, o bien un fractal aleatorio como el de Mandelbrot.

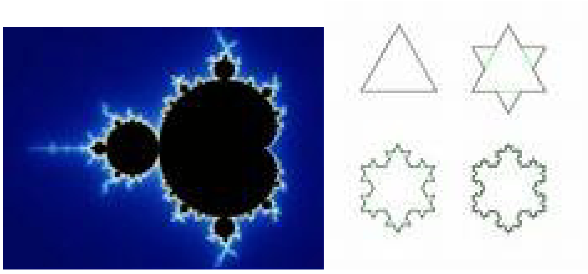

Figura 16. Conjunto de Mandelbrot y copo de nieve de Koch.

La figura 16 representa el fractal aleatorio de Mandelbrot y el del copo de nieve de Niels van Koch (1870-1924). Este último se forma mediante un proceso iterativo partiendo de un triángulo equilátero al que se le van anexionando otros triángulos también equiláteros, más pequeños, en cada uno de sus tres lados al dividir éstos en tres partes iguales. El perímetro de esta figura es infinito pero el área que encierra es finita.

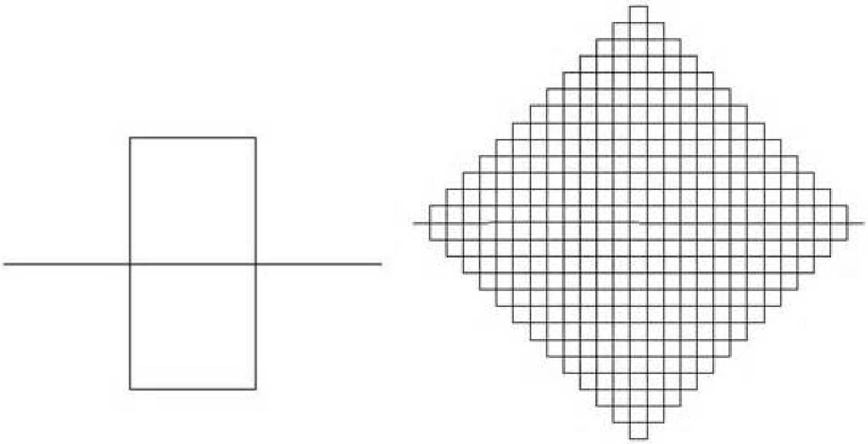

Figura 17. Generación de la curva de Peano.

En la figura 17 se observa la generación de una curva de Peano, fractal que se obtiene partiendo de una figura rectangular que se repite sucesivamente hasta, incluso, llenar con ella el plano.

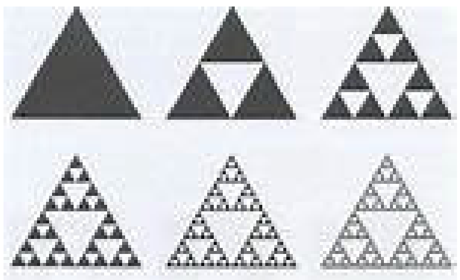

Figura 18. Generación del triángulo de Sierpinski.

Obsérvese en la figura 18 la formación del fractal conocido como triángulo de Sierpinsky. El proceso se inicia en un triángulo equilátero que se va rellenando sucesivamente de otros triángulos más pequeños, pero de la misma clase, tantas veces como se desee. Su denominación corresponde al nombre del matemático polaco Waclaw Sierpinski (1882-1969).

Pero para conocer un poco más qué tipo de algoritmo es el empleado, precisamos internarnos aunque sea de manera superficial en el análisis de cierta clase de función o más bien en determinado comportamiento de las funciones cuando se les aplica un *proceso* de tipo *iterativo*, es decir, de tipo repetitivo.

Hemos definido una función en la forma $y=f(x)$ y sabemos que a todo número x_1, por ejemplo, le corresponde otro y_1 único mediante el procedimiento $y_1=f(x_1)$. ¿Pero qué ocurriría si ese resultado y_1 se introduce en la función f, es decir, se calcula $y_2=f(y_1)$ y a continuación se hace lo mismo con y_2 para obtener $y_3=f(y_2)$ y así sucesivamente?.

Este proceso recibe el nombre de *iteraciones sucesivas* con base en la función f, y es un proceso que puede converger (acercarse) hacia un determinado valor fijo o, por el contrario, ir caminando hacia un valor cada vez más grande, es decir, tender hacia el infinito. Lo que constató Gaston Julia a principios del siglo XX es que ese comportamiento de la función f dependía de dos cosas: del valor inicial x_1 que se tome y de la forma que tenga la propia función f. Él consideró funciones polinómicas, definidas anteriormente, y de grado igual o superior a 2.

Vamos a estudiar un caso sencillo, $f(x)=x^2+c$, c constante cualquiera, con el fin de ver qué ocurre al aplicar a f el proceso iterativo descrito anteriormente. Un tipo de función parecido a ésta, fue el empleado por Mandelbrot para producir el *conjunto* que lleva su nombre. Más adelante describiremos la mecánica real que él utilizó. Mucho antes, en 1840, el matemático belga Pierre F. Verhulst (1804-1849) ya había estudiado este fenómeno, concluyendo que los resultados presentaban comportamientos que denominó *caóticos*.

Volvamos a la función antedicha y hagamos c=0,5 y como valor de inicio del proceso iterativo, x_1=0. Se obtiene entonces,

$$f(x_1)=(0{,}0)^2 + 0{,}5 = 0{,}5$$

Tomando ahora x_2=0,5 e introduciendo de nuevo este valor en la función f, obtendremos,

$$f(x_2)=(0{,}5)^2 + 0{,}5 = 0{,}75$$

Repitiendo una vez más,

$$f(x_3)=(0{,}75)^2 + 0{,}5 = 1{,}0625$$

Si el proceso iterativo lo repetimos una y otra vez, miles de veces, observaremos que el resultado es cada vez mayor, tiene tendencia a acercarse al infinito.

Hagamos lo mismo pero tomando ahora c=-0,5 y x_1=0.

$$f(x_1)=(0,0)^2 - 0,5 = -0,5$$

$$f(x_2)=(-0,5)^2 - 0,5 = -0,25$$

$$f(x_3)=(-0,25)^2 - 0,5 = -0,4375$$

$$f(x_4)=(-0,4375)^2 - 0,5 = -0,30859...$$

Al continuar así observaríamos que, después de realizarlo miles de veces, el resultado tiende o *converge* hacia un valor próximo a -0,3660..., que, al contrario que antes, es muy pequeño.

El conjunto de Mandelbrot se consigue tomando x_1=0 y distintos valores de la constante *c* para los que la secuencia iterativa no crezca más y más hacia el infinito. Se obtiene de esta forma un conjunto de Mandelbrot de *dimensión 1*. Más adelante hablaremos de la *dimensión de un fractal*.

Como ya hemos anticipado, en realidad los números y funciones con las que trabajó Mandelbrot pertenecían al campo complejo, es decir, los valores de la constante *c* y la variable independiente *z* eran números complejos y la función base de la iteración, *f(z)*, también una función compleja, funciones ya definidas anteriormente. Por consiguiente, el proceso iterativo estaba fundamentado en la fórmula $f(z)=z^2+c$. Resumiendo, Mandelbrot se interesó por el conjunto de puntos *c* del plano complejo tales que la serie definida por *c*, z_1 y $f(z_{n+1})=(z_n)^2+c$ no creciera tanto que tendiera a “escaparse” hacia el infinito.

Nos podríamos preguntar por qué una regla de iteración tan simple como es la empleada por Mandelbrot produce la autosemejanza entre los elementos obtenidos sucesivamente y que, a su vez, es el origen de tal belleza gráfica (figura 16). La respuesta técnica es que estos sistemas creados por tales fórmulas pueden presentar comportamientos caóticos y *atractores*. Es decir, como si se tratara del centro de un torbellino que atrae el agua hacia él. Entonces, alrededor de estos atractores se presentan comportamientos similares que generan formas semejantes al representarlos gráficamente en el plano complejo.

Para finalizar, introduciremos la noción de *dimensión fraccionaria* y su relación con los fractales. El matemático alemán Félix Hausdorff (1868-1942) tuvo una idea muy innovadora para definir la *dimensión* de una figura. Supongamos un segmento de línea recta; si su longitud la multiplicamos por 3, obtendremos un segmento tres veces más largo y como $3=3^{\mathbf{1}}$, decimos que la dimensión de una línea recta es **1**. Sea ahora, por ejemplo, un cuadrado; si el área encerrada en su recinto la multiplicamos por 3, la superficie resultante será tres veces más grande, es decir, valdrá $9=3^{\mathbf{2}}$. Concluimos entonces que la dimensión de una superficie es **2**. Por último, supongamos un cubo de lado unitario que se multiplica por 3. El volumen resultante valdrá $27=3^{\mathbf{3}}$: dimensión de los volúmenes, **3**.

Extendamos esta teoría a los fractales tomando como ejemplo el copo de nieve. Si la unidad básica del mismo la multiplicamos por 3, se convierte en otra 4 veces más larga. Aplicando a este caso la teoría de Hausdorff, escribiríamos $4=3^{\mathbf{D}}$ y de ahí, D=log 4/log 3, siendo **D** la dimensión.

Para el copo de nieve en cuestión, D≈ 1,26. Como consecuencia, la dimensión de este fractal es mayor que la dimensión de una recta que es 1, pero menor que la de una curva que es 2.

Existen muchos otros métodos de obtener fractales además de los basados en funciones polinómicas como es construyéndolos de manera puramente geométrica y sin cálculo alguno. No obstante la idea central detrás de un fractal es el proceso iterativo. Sea de una u otra forma como se construyan, hay que resaltar que los fractales, como ya se ha apuntado, se utilizan en las ciencias, en el grafismo y en las artes.

BIBLIOGRAFÍA

- ✓ Newman, James, *SIGMA, El mundo de las matemáticas*, Ediciones Grijalbo S.A., 1968.
- ✓ Amy Dahan-Dalmedico, *Une histoire des mathématiques*, Éditions du Seuil, 1986.
- ✓ Theoni Pappas, *Math Stuff*, Wide World Publishing/Tetra, San Carlos, CA, 2004.
- ✓ Les Functions, *Tangente, l'aventure mathématique*, Les Éditions POLE, Paris, 2015.
- ✓ Crilly, Tony, *50 mathematical ideas*, Quercus Publising Plc, London, 2007.
- ✓ Pickover, Clifford A., *El libro de las matemáticas*, Librero b. v., Holanda, 2011.
- ✓ Rey Pastor, Julio, *Curso de cálculo infinitesimal,* Editorial Biblioteca Matemática, Madrid, 1973.
- ✓ Trinh Xuan Thuan, *Désir d'infini,* Folio essais, Gallimard, 2013.
- ✓ Wikipedia, la enciclopedia libre.