Fibonacci y el número áureo

Antonio Rincón Córcoles
arcorcol@acta.es

"La geometría tiene dos grandes tesoros: el teorema de Pitágoras y el número áureo. El primero puede compararse a una medida de oro; el segundo, a una piedra preciosa"
(Johannes Kepler)

El "hombre de Vitrubio" es uno de los símbolos de la conquista de la modernidad por el espíritu humano. Este dibujo, obra del genial Leonardo da Vinci que se conserva en la Real Academia de las Artes de Venecia, recrea las proporciones "perfectas" del hombre tomando como referencia el canon clásico de belleza y armonía. Leonardo se inspiró para sus medidas en las indicaciones dadas en *De Architectura* por el escritor y arquitecto Marco Vitrubio, que vivió en Roma en el siglo I a.C. Mas en la poderosa composición del maestro del Renacimiento italiano se adivina un propósito más ambicioso que el que correspondería a una mera ilustración del período grecolatino: en esta figura se vislumbra un concepto del ser humano y la naturaleza como un "todo" integrado que el arte está obligado a aprehender y a representar.

Para Leonardo, el hombre es el modelo del universo, un ser que en su interior esconde las claves del cosmos en su multiplicidad de formas y manifestaciones. Así, a la vez que recomendaba elegir los motivos naturales como única inspiración verdadera del arte, no cejó durante su vida de indagar en el sentido profundo de la existencia a través del estudio y del saber humano. Un saber global, "renacentista", del que se convirtió en modelo.

Pintor, escultor, ingeniero, inventor, cocinero, anatomista, arquitecto, científico y teórico del arte, este hombre desaforado que desquiciaba a sus mentores cuando, una y otra vez, interrumpía sus proyectos pictóricos en los muros de los conventos para viajar a su albedrío, idear ingenios voladores, diseñar artefactos que desplumaran patos o ensayar extravagantes recetas de cocina, era además un estimable escritor. En sus cuadernos de notas dejó extensas muestras de la hondura de su pensamiento, fruto de una mente excesiva que no se resignaba a la tiranía de los límites pero que era consciente, al mismo tiempo, de la importancia del trabajo y del rigor científico.

Así se recoge en uno de sus numerosos aforismos: "Ninguna investigación humana puede ser denominada ciencia si no pasa a través de pruebas matemáticas". Más allá de las palabras, plasmó tal respeto por la medida y la razón en los trazos del "hombre de Vitrubio", que Leonardo compuso siguiendo un estricto modelo matemático donde tienen cabida tanto el arte como la geometría y el cálculo.

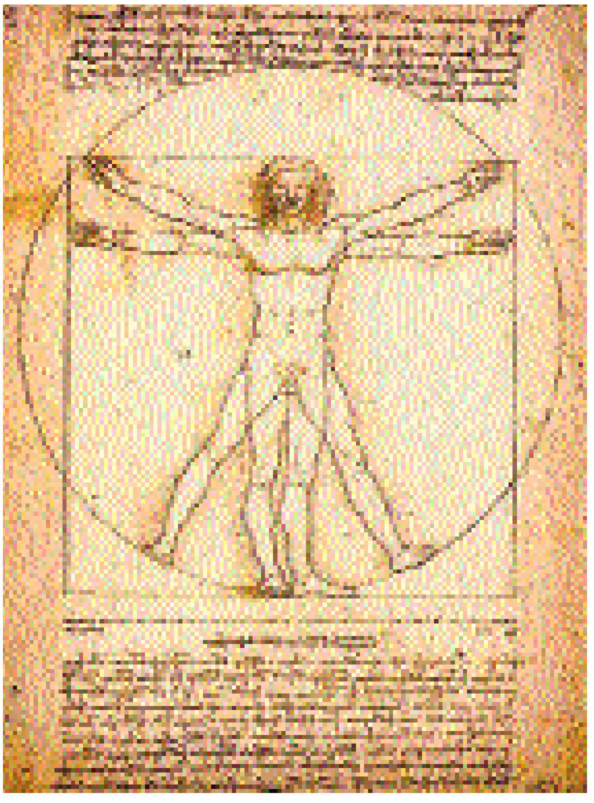

Fig. 1. El hombre de Vitrubio. Leonardo da Vinci admiró el sentimiento de orden y armonía que emanaba de las proporciones del arte grecolatino. Para componer su "hombre de Vitrubio" tomó como referencia literal un texto del romano Marco Vitrubio (siglo I a.C.) en el inicio del libro III de su obra De Architectura: "El ombligo es el punto central natural del cuerpo humano, ya que si un hombre se echa sobre la espalda, con las manos y los pies extendidos, y coloca la punta de un compás en su ombligo, los dedos de las manos y de los pies tocarán la circunferencia del círculo que así trazamos. Y de la misma forma que el cuerpo humano nos da un círculo que lo rodea, también podemos hallar un cuadrado donde igualmente esté encerrado el cuerpo humano. Porque si medimos la distancia desde las plantas de los pies hasta la punta de la cabeza y luego aplicamos esta misma medida a los brazos extendidos, encontraremos que la anchura es igual a la longitud, como en el caso de superficies planas que son perfectamente cuadradas".

Porque aunque habló de la existencia de "diversas proporciones buenas", este genio polifacético heredó de la antigüedad grecolatina uno de los fundamentos sobre los que se sustenta la idea de la armonía en el arte: la razón o sección áurea (que los renacentistas llamaron "divina proporción"). No es casual que el "hombre de Vitrubio" comparta las proporciones de los templos más esplendorosos y las más bellas estatuas de la Grecia antigua. El Partenón, la Venus de Milo o el Apolo de Belvedere siguen asombrándonos hoy, como la obra pictórica de Leonardo, por la elegancia y serenidad de sus formas perfectas, la sublimidad del gesto, el equilibrado reparto de los pesos corpóreos y visuales.

Muchas obras escultóricas y arquitectónicas posteriores los han imitado, como también la pintura, la fotografía y el diseño en sus distintas edades. El espíritu de la sección áurea sigue vigente hoy, a menudo inadvertido, en numerosos encuadres cinematográficos, en la composición de las páginas de libros y periódicos, en los desfiles de moda y, por supuesto, en las artes plásticas y audiovisuales, que lo han tomado incluso en sentido negativo, forzando su reverso para transmitir esa tensión de desequilibrio que agrieta las paredes del sentir contemporáneo.

Lo que acaso Da Vinci nunca supo es que sus elucubraciones sobre la "proporción divina" iban a encontrarse en el futuro, en el juego de espejos de la historia, con una secuencia de números sencillos desgranada algunos siglos antes por otro Leonardo, como él, italiano. Conocido en su tiempo por el sobrenombre de *Bigollo* y, póstumamente, por el de Fibonacci o Pisano, el Leonardo matemático había abierto sin saberlo un nuevo camino hacia el número áureo con un sencillo problema teórico sobre la reproducción de los conejos. Hoy se piensa que, además de sostener los cánones artísticos heredados de los antiguos, el número áureo condensa de un modo misterioso el secreto de las proporciones humanas, el ideal de lo bello y lo sublime y acaso el plan por el que se rigen muchas de las formas y estructuras de los organismos vivos.

TIERRAS Y GEOMETRÍA

No sería descabellado afirmar que el nacimiento de la geometría está relacionado con el origen de la propiedad privada. Como tantas otras ramas de las primeras matemáticas, las más antiguas disquisiciones geométricas de la historia tuvieron un cariz eminentemente práctico, más relacionado con las necesidades de la vida diaria que con las cimas de abstracción conquistadas en épocas posteriores.

La propia etimología de la palabra, en griego *γεωμετρια* o "medida de tierras", alude a su primitiva vocación: la agrimensura. En el hemisferio occidental, Egipto y Mesopotamia, cuna de tantos despertares, lo fueron también del saber geométrico. Ambas civilizaciones surgieron en condiciones semejantes: fértiles oasis de vida en un hábitat desértico, beneficiadas por estrechas y pródigas cuencas fluviales (el Nilo egipcio;

el Tigris y el Éufrates, en el actual Irak) que alimentaban unas tierras milagrosamente fecundas. La riqueza del río y la desnudez del entorno movieron a sus habitantes al sedentarismo, a la fundación de prósperas ciudades que con el tiempo devendrían en milenarias.

Este reordenamiento de las tribus nómadas en un territorio estable de cultivo se perpetuó durante generaciones. De este modo se hicieron necesarias técnicas para repartir las tierras, delimitar las lindes, medir las extensiones arables y estimar en consecuencia los tributos debidos a los nobles. Así surgió la geometría. De su índole ante todo práctica hablan los procedimientos geométricos descritos en los libros antiguos que se conservan de egipcios y mesopotámicos: aproximaciones tentativas para calcular las áreas de triángulos, cuadrados, círculos y otras figuras sencillas que, al cabo, se superpondrían groseramente para obtener formas complejas acordes con la orografía del terreno.

Aquel primitivo saber encontró en la *polis* griega un suelo abonado para un extraordinario florecimiento. Los geómetras helenos, miembros de distintas escuelas de filosofía, desarrollaron los criterios "prácticos" heredados de los egipcios y dieron un salto cualitativo aupados en sus espléndidas aptitudes para la síntesis. Desde Tales de Mileto a los pitagóricos, unieron la fértil imaginación de sus demostraciones visuales a la potencia de los "números mágicos" que aprendieron de los babilonios. Producto de ello fue el nacimiento de la "aritmogeometría", una mezcla de geometría y cálculo que amalgamó con rigor los razonamientos mentales y los resultados medibles en el mundo real.

En muchos de los grandes pensadores de la Grecia clásica predominó una orientación idealista, que les llevó a buscar la respuesta a los misterios de la vida en el poder razonador de la mente. Convencidos del valor del hombre como modelo del universo, dieron en definir un modelo de belleza inspirado en las dimensiones y las cualidades humanas. Bien sabido es que las hermosas esculturas griegas, incluso mutiladas y descabezadas como han llegado a nuestros días, basan su atractivo en un canon de perfección que era de cumplimiento obligado para el artista.

Los creadores de entonces estaban persuadidos de que el secreto de la hermosura no está sólo en la simetría, sino más bien en la proporción de las partes, "de un dedo en relación a un dedo, de todos ellos en relación al metacarpo y al carpo, de éstos en relación al codo, del codo en relación al brazo y de todo en relación a todo", como expusiera Policleto en el siglo V a.C. en su célebre canon de la belleza masculina[1]. Los escultores griegos respetuosos de este dogma estimaban, por ejemplo, la talla de sus estatuas de manera que la cabeza fuera la séptima parte del cuerpo.

Lo que no es tan conocido es que los griegos llevaron las dimensiones del cuerpo humano también a sus obras arquitectónicas. Con su mente rigurosa, establecieron los cánones de construcción de sus templos y palacios sobre la base de valores matemáticos concretos. Y es aquí donde irrumpe, con toda su fuerza, el número áureo, la esencia de lo que en el Renacimiento se llamó "la divina proporción".

LA MEDIDA DE TODAS LAS COSAS

"El hombre es la medida de todas las cosas, de las que son en cuanto que son y de las que no son en cuanto que no son", afirmaba Protágoras de Abdera (siglo V a.C.). Este aserto resume con elocuencia una de las fuentes del pensamiento occidental. Acorde con ello, la idea de sublimidad artística entre los griegos de aquel tiempo no podía ser ajena a la dimensión humana, y las representaciones plásticas y arquitectónicas así lo reflejaron.

Amantes de la especulación numerológica y convencidos de que los números "existen" fuera de la mente humana y revelan fragmentariamente una esencia superior incognoscible, los pitagóricos del siglo VI a.C. creyeron haber encontrado una figura geométrica que reflejaba las proporciones ideales desde el punto de vista de la estética. Este "rectángulo áureo", como dio en llamarse, gozaba de una curiosa propiedad: si se "cuadraba" en su interior, es decir, si se desgajaba del mismo su parte cuadrada, el sobrante era una nueva figura cuadrangular que también respondía a las dimensiones del "rectángulo áureo". Ésta, a su vez, podía subdividirse en otra pareja en miniatura de "cuadrado más rectángulo áureo", y así hasta el infinito.

[1] En las creaciones escultóricas más célebres de Policleto, como el *Doríforo* o "joven llevando una lanza" que se conserva, en réplica, en el Museo de Nápoles, las dimensiones de las figuras humanas responden a proporciones matemáticas fijas.

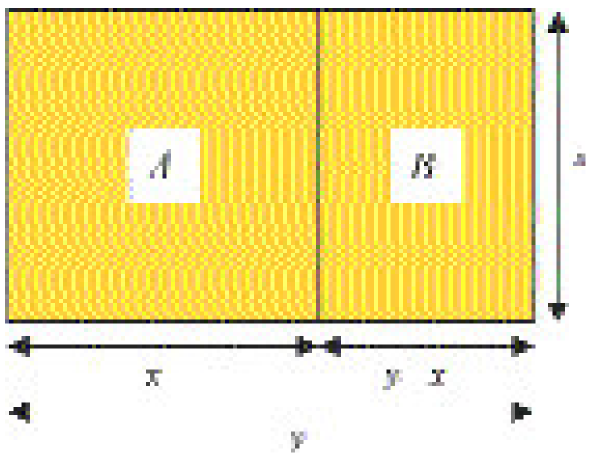

Fig. 2. Rectángulo áureo. Al desgajar del rectángulo mayor el cuadrado A, de lado x, queda un nuevo "rectángulo áureo" B con las mismas proporciones que el original. La resolución geométrica del problema indica que, para que se produzca esta circunstancia, es necesario que la proporción entre la base y la altura del rectángulo áureo tenga el valor siguiente:

$$\varphi = \frac{y}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398875...$$

[También podría tomarse la relación inversa:

$$\varphi = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}61803398875...]$$

Este "número áureo", que en tiempos modernos fue llamado phi (φ) en honor al escultor Fidias, quien lo utilizó profusamente en sus obras durante el período clásico griego, tiene una abrumadora presencia en muchas de las formas y proporciones de los seres vivos.

Los pensadores griegos pronto se sintieron atraídos por la peculiaridad de este rectángulo, y constataron que la relación entre su base y su altura (el "número áureo", cuyo valor aproximado es 1,61803398875...) aparece con frecuencia al medir las relaciones de distancias entre los elementos de figuras geométricas sencillas. Claramente, así sucede en el pentáculo o pentagrama (polígono en estrella inscrito en un pentágono regular), el decágono (polígono de diez lados) y el dodecágono (de doce).

Llamativamente, la proporción entre la base y la altura de los rectángulos áureos parecía corresponderse bastante bien con algunas de las dimensiones esenciales de la figura humana. Tal es así que, en el período clásico, comenzó a utilizarse habitualmente en los cálculos con que los escultores preparaban sus obras, y se integró también en el canon arquitectónico, como se han encargado de demostrar los historiadores modernos del arte con un análisis pormenorizado de las ruinas helenas.

La sensación de plenitud que emana de aquellas creaciones, reproducida a menudo por los artistas de la posteridad, lleva a preguntarse si, acaso, los hacedores griegos no dieron intuitivamente con un modelo de abstracción visual de la realidad que el ser humano ya admiraba en la naturaleza desde tiempo inmemorial. Investigaciones contemporáneas apuntan a que la relación numérica sencilla expresada por el número áureo se manifiesta no sólo en muchas de las proporciones del cuerpo humano, sino también en una larga lista de seres vivos.

Estas "casualidades" no se adivinaban aún cuando, siglos más tarde, un pionero de la matemática moderna, el italiano Leonardo Fibonacci, escribió una página nueva en la historia del número áureo con su imaginario problema de la reproducción de los conejos.

LOS NÚMEROS QUE LLEGARON DEL ESTE

Las matemáticas constituyen uno de los máximos logros de la mente humana. Tras una evolución de siglos, han alcanzado un nivel de abstracción que les permite expresar, en conjuntos de fórmulas sintéticas y elegantes, algunas de las cimas más altas y escarpadas del pensamiento contemporáneo. Algunos razonamientos matemáticos son verdaderas obras de arte, plenas de inspiración e ingenio y, como en otras esferas de la creatividad humana, sólo comprensibles para los iniciados.

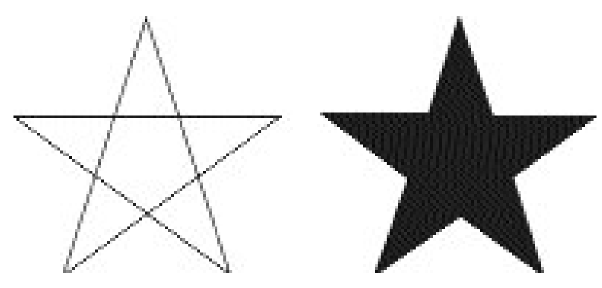

Fig. 3. Representaciones del pentáculo, una de las figuras geométricas en cuyas relaciones proporcionales internas aparece a menudo el número áureo. Este polígono en estrella, también llamado pentagrama o pentángulo, es un signo pagano que más tarde se usó como imagen de invocación satánica. Con tal significado aparece en muchas películas cinematográficas, entre ellas "La semilla del diablo" (Rosemary's Baby), de Roman Polanski.

A pesar de ello, una de las cualidades que distingue al lenguaje matemático es su universalidad. Cualquier mente entrenada puede interpretar con el mismo nivel de comprensión una fórmula o una sucesión enlazada de proposiciones lógicas expresadas mediante símbolos. No existen aquí barreras de idioma, e incluso entre la gente común la lengua matemática puede considerarse universal. En todas las partes del mundo se usan hoy los mismos signos para expresar cantidades: combinaciones de 1, 2, 3, 4, etc. Un simple vistazo a un texto escrito en árabe o cirílico lo demuestra: para un europeo occidental no políglota, lo único reconocible son las cifras.

Sin embargo, el empleo internacional de tales guarismos apenas tiene unos siglos de existencia. En los tiempos romanos se usaba, por ejemplo, un complicado sistema de numeración inspirado no muy lejanamente en los "palotes" usados por los pueblos primitivos para contar sus escasas posesiones: I, II, III, IV, V, etc. Otras culturas adelantadas de la historia recurrieron a procedimientos no mucho más notables, lo que, si no retrasó las habilidades de cálculo[2], al menos entorpeció las capacidades de sistematizar el pensamiento abstracto que se afinaron en tiempos posteriores.

Todo cambió en los últimos siglos del primer milenio, a lomos de las invasiones que partieron al este y al oeste desde las desérticas extensiones de la península de Arabia. Los belicosos guerreros de la *yihad* abrieron camino hacia las tierras ocupadas a una legión de hombres de cultura, quienes mantuvieron vivo el espíritu de la ciencia y la filosofía en unos tiempos en que oriente se debatía en un mar de contradicciones y la caída del Imperio Romano había sumido a Europa en una densa oscuridad. Fueron aquellos árabes los que encontraron en las llanuras de la India un sistema de numeración, basado en guarismos decimales ordenados en posiciones relativas de unidades, decenas, centenas, etc., que les resultó ciertamente claro y eficaz. Ellos mismos lo perfeccionaron en algunas cuestiones menores y, convertido ya en indo-arábigo, este sistema viajó en las grupas de caballos de los invasores hasta los confines de su pujante imperio.

El introductor en Europa del nuevo sistema numeral fue un ciudadano de Pisa, nacido hacia 1170 en el seno una familia de mercaderes que acostumbraban a buscar fortuna por todo el Mediterráneo. De nombre Leonardo, este hijo de Guglielmo Bonacci ("*il figlio di Bonacci*" o "*il Fibonacci*", como se le llamó más tarde) tuvo ocasión en su juventud de entrar en contacto con unos métodos de cálculo que le maravillaron por su simplicidad.

El de Leonardo "*il Bigollo*", como fue conocido en vida, es un caso explícito de lo instructivo que es conocer mundo. Al ser nombrado cónsul de la comunidad de mercaderes pisanos en el norte de África, su padre Guglielmo se lo llevó consigo siendo muchacho hasta el puerto de Bugia, hoy Bejaia, en la actual Argelia. Allí, el joven aprendió cálculo con un maestro árabe, y más tarde prolongó sus estudios mientras viajaba sin descanso por Egipto, Siria, Grecia, Sicilia y Provenza. En aquel entonces, apenas unos cuantos iniciados conocían el sistema de números indo-arábigos, por las escasas traducciones de la obra del persa Al-Jwarizmi[3]. La mente despierta del *Bigollo* comprendió enseguida las oportunidades que ofrecía el novedoso esquema numérico y, como él mismo afirmó, "cuando me introdujeron en el arte de los símbolos hindúes, muy pronto el conocimiento de su arte me plugo por encima de todos los demás".

Hacia el 1200, ya rondando la treintena, puso término a su vida nómada y regresó a Pisa con un extenso bagaje de conocimientos aprendidos. En los años siguientes se dedicó a compendiarlos y divulgarlos en varios libros que tendrían una resonancia inusitada, habida cuenta que aún no existía la imprenta de tipos móviles (faltaban más de dos siglos para que Gutenberg la inventara) y las copias debían escribirse pacientemente a mano.

Los siete primeros capítulos de su libro más leído, *Liber Abaci* ("El libro del ábaco")[4], versaban íntegramente sobre el sistema numeral indo-arábigo. Tal fue su éxito que llamó incluso la atención del monarca del

2 Algunas personas se preguntan cómo se las arreglaban los antiguos romanos para realizar sumas, restas y multiplicaciones con su prolijo sistema de numeración. Obviamente, no seguían las reglas actuales con lápiz y papel, sino que usaban unas rudimentarias y eficaces "máquinas de calcular", precursoras de los modernos ábacos. Aún hoy, observar a un japonés o un ruso ducho en el manejo de estos instrumentos (tradicionales en sus países) es un espectáculo asombroso, y una demostración de hasta dónde puede llegar la destreza humana.

3 Muhammad ibn Musa al-Jwarizmi, que vivió en la corte de Bagdad entre los siglos VIII y IX, recibió un tributo perdurable en el mundo de la matemática con la acuñación de los vocablos "guarismo" y "algoritmo", ambos degeneraciones occidentalizadas de su nombre. Del título de la obra más conocida de este sabio oriental, *Kitab al-jabr wa al-muqabalah* ("El libro de la integración y la ecuación"), procede la palabra "álgebra".

4 Otros de sus títulos destacables son *Practica Geometriae* ("Práctica de geometría"), de 1220, y *Liber Quadratorum* ("El libro de los números cuadrados"), de 1225.

Sacro Imperio Romano-Germánico, Federico II, con quien Leonardo mantuvo correspondencia durante los últimos años de su vida.

En la segunda parte del *Liber Abaci*, el pisano recogió una amplia colección de supuestos prácticos destinados a sus "queridos mercaderes", con cálculos sobre el reparto de mercancías y los beneficios de las transacciones comerciales, la conversión de pesos y medidas o los cambios de moneda entre distintas plazas del Mediterráneo. La tercera parte contiene una lista de problemas inspirados en los conocimientos que adquirió de oriente a través de los árabes, pues para muchos de ellos se han encontrado equivalencias chinas bastante literales. El planteamiento de los algunos de estos problemas es, cuando menos, curioso. Uno de ellos reza, más o menos, así: "Si un perro que corre a una cierta velocidad que aumenta aritméticamente persigue a una liebre cuya rapidez, menor, también crece de modo aritmético, ¿qué distancia recorrerá la liebre antes de caer en las fauces del sabueso?". En otro se pregunta por el tiempo que tardará una araña en trepar por una pared si de día asciende unos metros y por la noche se deja caer un trecho, vencida de cansancio.

Merece la pena detenerse, finalmente, en uno más de los extraños acertijos matemáticos de este maestro pisano. En el "Libro del ábaco" se expresa de la manera siguiente: "Un hombre encierra a una pareja de conejos en un lugar rodeado en todas direcciones por un muro. Suponiendo que cada mes la pareja tiene dos conejos y que éstos son productivos cuando transcurren dos meses, ¿cuántas parejas pueden producirse al cabo de un año?". La solución de este enunciado, aparentemente tan simple y tan inocuo, alumbraría siglos más tarde una línea de investigación matemática que el antiguo aprendiz de mercader difícilmente pudo imaginar en vida. El resultado se conoce hoy como "serie de Fibonacci", y cobró un renovado interés cuando se descubrió su sorprendente relación con la sección áurea de los antiguos griegos.

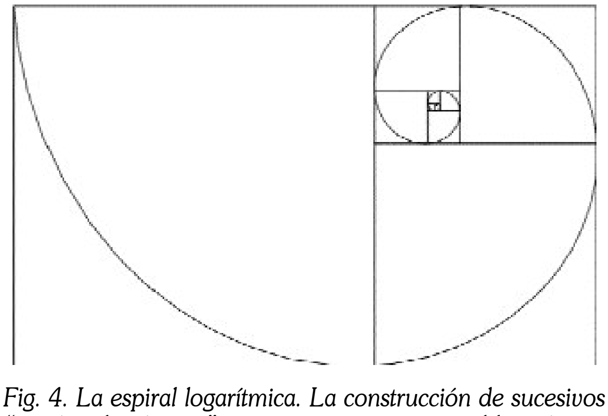

Fig. 4. La espiral logarítmica. La construcción de sucesivos "rectángulos áureos" permite trazar una espiral logarítmica cuyo diseño, muy frecuente en la naturaleza, ha apasionado a multitud de matemáticos insignes. El francés René Descartes estuvo entre sus descubridores, y el suizo Jakob Bernoulli, fascinado por la hermosura de su forma, quiso hacerla grabar en su lápida mortuoria: lamentablemente, el artífice que recibió el encargo no supo reproducirla bien.

¿CÓMO SE REPRODUCEN LOS CONEJOS?

La resolución aritmética del problema de la reproducción de los conejos de Leonardo Pisano no presenta, en principio, grandes complejidades:

- En el mes 1, hay un solo par de roedores, los primeros de la granja.
- En el mes 2, esta pareja tiene descendencia (2 conejos más), con lo que en la cerca hay ya 2 pares de animales.
- En el mes 3, la primera pareja vuelve a tener hijos, pero la segunda es aún infértil. Por el tanto, habrá 2 + 1 = 3 pares de roedores.
- En el cuarto mes, la primera pareja habrá tenido dos descendientes más, y la segunda, ya fértil, una pareja; la tercera es infértil. Por tanto, el número total de pares de conejos será los tres que había más dos nuevos, es decir, 5.
- En el quinto mes, tendrán nueva descendencia las parejas 1, 2 y 3, con lo que se sumarán al total tres nuevos pares de conejos hasta llegar a 8 (las parejas nacidas en el cuarto mes no son todavía capaces de concebir).

Prolongando el razonamiento, es posible calcular el número total de parejas de estos roedores que habrá al cabo de un año: 608. Este problema no es demasiado realista, pues presupone una camada fija de dos conejos cada vez, de los que ninguno muere, y además un estricto reparto por sexos, masculino-femenino, que no tiene ninguna verosimilitud práctica. Su interés reside más bien en la secuencia de números que se va obteniendo para los meses sucesivos: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, etc. (modernamente se añadió a la serie un 1 por delante, de manera que para construirla basta sumar a cada número el anterior para obtener el siguiente: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...).

El mérito inicial de esta secuencia reside en que fue la primera serie recursiva que se escribió en Europa[5], un hecho que cupo situar, en un principio, en la esfera de lo anecdótico. Así, la gloria que ya en vida recibió su autor obedecía principalmente a su descubrimiento para el continente del sistema indo-arábigo de numeración.

Sin embargo, transcurridos cinco siglos la figura del Leonardo matemático cobró un interés inusitado. A mediados del siglo XVIII, los instrumentos de su ciencia habían cambiado sustancialmente. Ya Newton y Leibniz habían introducido los fundamentos del cálculo diferencial, y la noción de límite para las sucesiones numéricas (intuitivamente, el valor fijo al que tiende una secuencia infinita de magnitudes) se planteaba con naturalidad en buena parte de los desarrollos en curso. Parte del trabajo de los matemáticos consistía en readaptar los hallazgos de los pensadores “antiguos” al nuevo lenguaje de su disciplina. En ello estaba enfrascado en 1753 el escocés Robert Simson cuando, desde su cátedra de la Universidad de Glasgow, descubrió una faceta inesperada en la “serie de los conejos” del Pisano.

La idea de Simson consistió en crear una nueva secuencia numérica en la que cada término se calculara dividiendo entre sí cada dos términos sucesivos de la serie original. El resultado fue el siguiente:

$a_1 = 1 / 1$	$= 1$	(primer término de la nueva serie)
$a_2 = 2 / 1$	$= 2$	(segundo término, etc.)
$a_3 = 3 / 2$	$= 1{,}5$	
$a_4 = 5 / 3$	$= 1{,}67$	
$a_5 = 8 / 5$	$= 1{,}6$	
$a_6 = 13 / 8$	$= 1{,}625$	
$a_7 = 21 / 13$	$= 1{,}62$	
$a_8 = 34 / 21$	$= 1{,}61538...$	
$a_9 = 55 / 34$	$= 1{,}61764...$	
$a_{10} = 89 / 55$	$= 1{,}618181...$	
$a_{11} = 144 / 89$	$= 1{,}617977...$	
$a_{12} = 233 / 144$	$= 1{,}618055...$	
$a_{13} = 377 / 233$	$= 1{,}618025...$	
$a_{14} = 610 / 377$	$= 1{,}618037...$	

y así sucesivamente.

Como conclusión, el matemático escocés encontró que el límite de esta nueva sucesión inspirada en la original de Leonardo de Pisa era, precisamente, 1,61803398875..., el número áureo.

LAS CUENTAS DE LA NATURALEZA

La atractiva coincidencia desvelada por Simson en la serie que pronto pasó a llamarse de Fibonacci[6] no pasó desapercibida para otros científicos. El interés se multiplicó cuando comenzaron a encontrarse semejanzas entre los números de esta secuencia y los ejemplos de la naturaleza. Se comprobó así que las pipas de girasol se ordenan en la flor siguiendo el perfil de una espiral que podía construirse usando como plantilla los rectángulos áureos (la espiral logarítmica de los matemáticos, véase fig. 4). O que esta misma espiral se observa en el “diseño” de las piñas comunes, en los cuernos de diversos mamíferos y en las volutas de la concha de muchos caracoles.

Desde mediado el siglo XIX, la confrontación con la realidad de la “divina proporción”, el número áureo y la serie de Fibonacci no dejó de deparar sorpresas. Una de las más espectaculares vino de la observación de la morfología de las plantas, del número de sus pétalos y la organización de las hojas en los tallos (filotaxia). Se supuso entonces que la cantidad y la disposición de hojas, flores y demás órganos vegetales se establecen de manera que la planta crezca sin que unos se obstaculicen a otros ni se estorben la sombra, es decir, de un modo óptimo. Y dicho modo óptimo demostró tener un vínculo visible con la serie de Fibonacci. Se diría que muchas formas vivas se “despliegan” siguiendo los dictámenes del número áureo y de su serie matemática asociada.

El análisis de la planta de girasol es especialmente revelador. Sus flores no sólo se organizan en una forma helicoidal acorde con el modelo matemático de la espiral logarítmica, sino que además lo hacen en dos espirales que apuntan en direcciones opuestas: 55 semillas en el sentido de las agujas del reloj y 34 en el contrario.

---

5 Se llama serie recursiva a la que puede establecerse por medio de una fórmula, o relación numérica, para determinar la relación entre cada dos de sus términos sucesivos. En el caso de la serie de Fibonacci, dicha fórmula puede escribirse del modo siguiente: $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, donde n es el número de orden de cada término.

6 La acuñación del nombre, en reconocimiento al sabio de Pisa, se debió al matemático francés Édouard Lucas (1842-1891), quien propuso secuencias alternativas e igualmente interesantes a la “serie de los conejos”. Hijo de un tonelero, Lucas es célebre sobre todo por sus imaginativas recreaciones matemáticas, entre las que destacan las torres de Hanoi tan queridas para los aficionados a los juegos informáticos.

¡Dos números consecutivos de la serie de Fibonacci! Lejos de constituir un hecho aislado, en otras especies, como las margaritas, las coliflores, las alcachofas o las piñas, se encontraron tendencias similares. Numerosas plantas, además, poseen tres, cinco, ocho, trece o veintiún pétalos, todos ellos números de Fibonacci. Y en muchas especies arbustivas y arbóreas se observan tendencias prevalentes a disponer los brotes en los tallos a distancias susceptibles de ser relacionadas con el número áureo.

Extremando la comparación, se han querido ver signos semejantes en la cantidad de dedos de la mano o el pie humanos (cinco, un número de Fibonacci) o de las patas de las aves (tres, no cuatro ni seis, que no pertenecen a la serie) y los apéndices de otros animales. Muchas plantas e invertebrados, como los equinodermos, poseen simetría pentámera, es decir, cinco "brazos" radiales que parten simétricamente del centro de su cuerpo: las más hermosas estrellas de mar son pentáculos perfectos. Los ejemplos de este tenor son innumerables. Aunque más elocuentes, si cabe, son algunos descubrimientos que relacionan la secuencia de Fibonacci con las pautas de reproducción de ciertos insectos. Así sucede con los árboles genealógicos de los zánganos dentro de las colmenas: estas "abejas macho" no tienen padre sino sólo madre; en consecuencia, el número de sus abuelos es 2 (los padres de la madre); el de sus bisabuelos, 3 (pues el abuelo macho no tuvo padre); el de sus tatarabuelos, 5; y así sucesivamente, para ir desgranando de un modo exacto la larga serie de Fibonacci[7].

¿Acaso podría todo esto obedecer al puro azar? Muchos científicos se niegan a aceptarlo. Algunas de las ideas que proponen para comprender tales fenómenos parecen, cuando menos, dotadas de cierto fundamento. Así, el privilegio que otorga la naturaleza a las formas de espirales logarítmicas se ha explicado como el resultado de una necesidad "física": una agrupación de este tipo parece la óptima para agrupar la materia sin que se desorganice. No en vano, la forma espiral está incluso en la esencia codificada de la vida, como es la estructura en doble hélice de la molécula de ADN (ácido desoxirribonucleico).

Otros hombres de ciencia han relacionado estos aspectos con las leyes de la simetría y la gravedad, dos elementos determinantes para las condiciones ambientales en que surgió, y subsiste, la vida. Dado que, por ejemplo, el líquido que se vierte por un orificio desde una superficie (por ejemplo, un desagüe) sigue una trayectoria helicoidal, acaso describible por una espiral logarítmica, ¿podría haber influido en la orientación morfológica de los primeros seres vivos, tan dependientes del agua? Si así fuera, y aceptando la hipótesis de la evolución de Darwin, los actuales organismos vivos no seríamos sino descendientes de aquéllos, marcados con la impronta secular del "efecto Fibonacci".

En todo caso, la ciencia actual no parece madura para establecer una concatenación causal de hechos que abarque desde el origen de las primeras bacterias hasta las estructuras "fibonaccianas" visibles en la naturaleza. Tal sería una tarea hercúlea, acaso inabarcable dada la infinitud de formas vivas existentes. Aun así, parece sensato pensar que la serie imaginada por Fibonacci no es una mera especulación filosófica, sino un patrón real que, como tendencia dominante, lleva a los organismos a desarrollarse y reproducirse según un cierto orden y dentro de un conjunto de estructuras muy concretas. La morfología biológica, la "ciencia de las formas vivas", ha encontrado en este campo una veta muy prometedora de investigaciones futuras.

MOSAICOS, DARDOS Y COMETAS

El reconocimiento de la importancia de la sección áurea y los números de Fibonacci ha dado paso en las últimas décadas a un tropel de innovadoras disquisiciones acerca de las formas de la naturaleza. Después de muchos siglos a rémora de un hallazgo tan resbaladizo e inconcreto como éste, la iniciativa ha pasado al dominio de los científicos, que parecen decididos a tomar la delantera. Un ejemplo positivo de esta actitud se encuentra en el británico Roger Penrose.

Inspirándose en el éxito de la simetría pentámera en el medio natural, este incansable investigador y gran divulgador científico encontró un modo curioso de cubrir un plano con formas geométricas regulares. En 1974, ideó dos estructuras geométricas elementales, a las que llamó dardo y cometa, cuya superposición sucesiva e inteligente permitía ocupar totalmente una superficie sin dejar ningún resquicio libre (ver figura 5).

[7] Los zánganos nacen de huevos no fecundados, directamente de la madre. Como se sabe, no "trabajan" cotidianamente en la colmena, en la que viven despreocupados de los afanes de las obreras. No recolectan polen ni néctar, pues su único propósito social es fertilizar a las nuevas reinas en un vuelo acrobático. Después de cumplida su misión, mueren.

Según confesión del propio Penrose, en la elección de estos dos modelos elementales tuvo mucho que ver el número áureo, base última de los dibujos que, en el mundo científico, han pasado a conocerse como "mosaicos de Penrose".

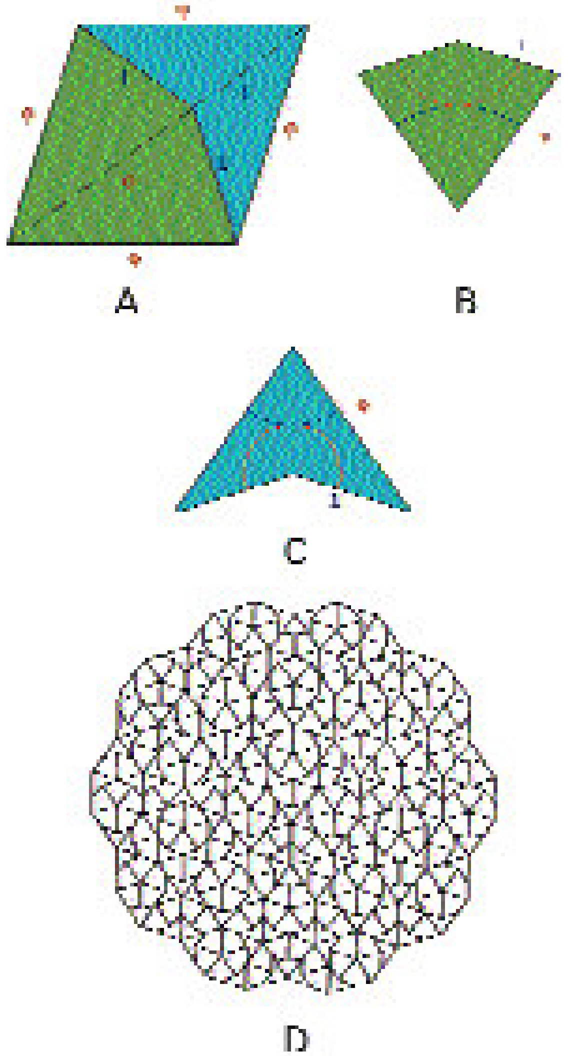

Fig. 5. Mosaicos de Penrose. El británico Roger Penrose se basó en el número áureo para definir dos sencillas figuras geométricas con que "teselar" (cubrir en mosaico) una superficie. Del rombo A desgajó una forma en cometa (en inglés kite, B) y otra en dardo (dart, C). Con ellas es posible cubrir un plano, sin dejar intersticios, mediante una combinación regular no periódica de ambos elementos (según se expresa en D).

Este pasatiempo cultivado por Penrose, denominado teselación y practicado desde antiguo, no habría tenido mayor trascendencia que la teórica si no fuera porque se vio acompañado, al cabo de diez años, por un descubrimiento que recordó que a menudo las matemáticas anteceden a la observación científica. Tal fue el hallazgo en 1984 de unas sustancias cristalinas, llamadas cuasicristales, que poseen una estructura microscópica con simetría quíntuple semejante a algunas de las figuras formadas con los mosaicos de Penrose. En estos cuasicristales, los átomos ocupan distribuciones fijas y regulares, pero no periódicas, extendiéndose a todo el material de manera que cada celdilla atómica posee una configuración distinta a las de su alrededor. Relativamente comunes en aleaciones metálicas de hierro, cobalto y níquel, estos materiales poseen una dureza extraordinaria y buena elasticidad, por lo que son muy útiles en la fabricación de recubrimientos protectores antiadherentes.

La investigación de formas geométricas inspiradas en la serie de Fibonacci ha encontrado definitivamente un campo fértil de aplicaciones en varios dominios de la ciencia y la técnica reciente. En un intento por comprender la complejidad del cosmos, la secuencia fibonacciana ha llevado a recurrir a simetrías espirales, pentámeras o basadas en otros de los números de la serie para proponer modelos físico-matemáticos que describan con acierto las formas de la naturaleza.

La sucesión de Fibonacci y el número áureo, asociados a los mosaicos de Penrose y a los sistemas fractales, han contribuido también a crear una pléyade de nuevas tecnologías para la generación de imágenes digitales con ayuda de ordenadores. Una forma de "tecnoarte" que, tras un largo rodeo, nos remite de nuevo al punto de partida. El número áureo, llave de la proporción divina de que hablara Leonardo da Vinci, abre ahora una puerta más, alambicada y compleja, en el viaje de la humanidad por las inextricables sendas del saber y el sentimiento estético. Tal vez porque, llevándolo en sí mismo como su talismán oculto que lo pone en contacto con la naturaleza viva, no deja el hombre nunca de placerse en su contemplación.