El universo fractal

Vicente Trigo Aranda

Si toma una esfera y amplía o disminuye bastante la escala con la que la ve, es evidente que sigue teniendo una esfera pero, sin embargo, su estructura no siempre resulta apreciable a simple vista; de hecho, ésta es la razón por la cual se consideró durante tantos siglos que la Tierra era plana. En cambio, si observa una fotografía de un fragmento de costa (el ejemplo más difundido de fractal en la naturaleza) y lo amplia, verá que consta de múltiples y diminutos fragmentos que recuerdan también a una costa, con sus diminutas bahías y cabos. En esencia, esto es precisamente un fractal: un objeto geométrico que mantiene su estructura en un rango infinito de escalas.

El extraordinario mundo fractal se ha popularizado gracias a las amplias posibilidades gráficas de los modernos ordenadores, que nos muestran su belleza y su cada vez mayor utilidad práctica. Estas pocas páginas son un limitado espacio que sólo permite una somera introducción a este universo geométrico, tan apasionante y novedoso, pero espero que le ofrezcan una visión panorámica lo suficientemente atractiva como para que se lance a descubrir por su cuenta las peculiaridades de los fractales.

LOS ANTECEDENTES

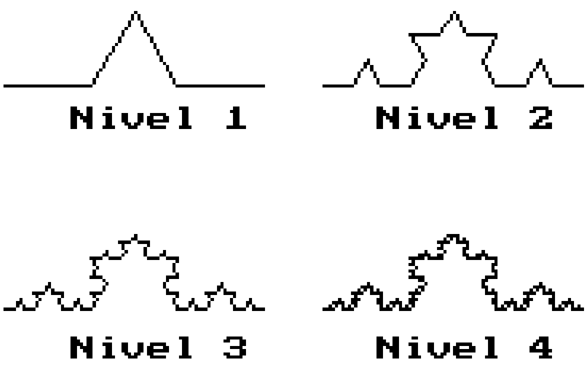
Quizá le sorprenda averiguar que todo comenzó a principios del siglo XX como un simple desafío matemático, relativamente sencillo. Grosso modo, se dice que una función es continua cuando se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel y se dice que es derivable en un punto si admite tangente en él.

Es fácil demostrar que toda función derivable es continua pero el recíproco no es cierto, como puede observar si representa la función valor absoluto. Obtendrá una V centrada en el origen, punto en el cual no es derivable, ya que si nos acercamos por la izquierda la tangente es la bisectriz del segundo cuadrante y si lo hacemos por la derecha es la bisectriz del primero.

Así las cosas, es elemental dibujar curvas continuas que contengan infinitos puntos en que no sean derivables (piense, por ejemplo, en una cuya gráfica semeje dientes de sierra). La cuestión que se planteaba entre los matemáticos de la época era la siguiente: ¿Es posible encontrar alguna función que sea continua y que no sea derivable en ninguno de sus puntos?

Como puede imaginar, la respuesta resultó ser afirmativa, aunque, eso sí, las curvas que satisfacen estas características son un tanto especiales, y, de hecho, se acostumbra a denominarlas patológicas, debido a lo anómalo de su construcción.

Partamos, como hizo Helge von Kock, de un segmento recto de una determinada longitud, que diremos corresponde al nivel cero. En el siguiente nivel lo dividimos en tres partes y sobre la central dibujamos un triángulo equilátero, suprimiendo el lado común. En los sucesivos niveles reiteramos este proceso con cada uno de los segmentos, de modo que se genera algo similar a[1]:



Observe que esta curva recursiva puede generarse sin mucha dificultad con un procedimiento análogo al siguiente:

```
Procedure lado (Longitud,Nivel:Integer);
Begin
  If Nivel=0 Then Forwd (Longitud)
                Else
                   Begin
                     lado (Longitud Div 3,Nivel-1);
                     TurnLeft (60);
                     lado (Longitud Div 3,Nivel-1);
                     TurnRight (120);
                     lado (Longitud Div 3,Nivel-1);
                     TurnLeft (60);
                     lado (Longitud Div 3,Nivel-1);
                   End;
End;
```

Ahora llega lo asombroso: Puede demostrarse que la curva así definida, en su nivel infinito, es continua en todos sus puntos y no es derivable en ninguno… Y no sólo eso. Si utilizáramos una lupa, veríamos que cada nivel está constituido por curvas idénticas a la anterior pero de menor tamaño; es decir, su aspecto es el mismo tanto si mide centímetros como kilómetros.

Una vez abierto el camino, fueron apareciendo muchas otras curvas de características similares que se conocen por el nombre del matemático que las estudió: Cantor, Hilbert, Sierpinski, etc.

Todo esto quedó encerrado en el ámbito erudito hasta que, en 1975, Benoît Mandelbrot publicó su célebre *obra Les objets fractals. Forme, hasard et dimension* donde, introdujo el concepto de fractal (del latín *fractus*, irregular), con el que aludía a gráficas de tamaño y orientación diversa que mantienen su aspecto independientemente de la escala[2].

Creó así una nueva geometría que ha sobrepasado el mero ámbito académico. Al principio a causa de su extraña belleza, como puede apreciar en las variadas gráficas que ilustran este artículo, y actualmente por su notable utilidad en los más diversos campos.

DIMENSIÓN FRACTAL

Si nos fijamos en la curva de Kock, vemos que en cada nivel se aumenta la longitud en un tercio, por lo que acaba teniendo una longitud[3] infinita, a pesar de que se mantiene acotada en un recinto finito. Para solventar estas perturbaciones, Félix Hausdorff definió, en 1919, un nuevo concepto de dimensión que Mandelbrot recuperó para caracterizar los fractales. Así, si el todo se puede descomponer en N partes que se deducen mediante una homotecia de razón R, la dimensión fractal de la figura viene dada por la expresión:

$$D = \log N / \log (1/R)$$

Por ejemplo, es sencillo ver que la curva de Kock de nivel 1 consta de 4 curvas de Kock de nivel 0 y longitud 1/3; la de nivel 2 consta de 4 de nivel 1 cuyo lado mide un tercio del anterior, y así sucesivamente. Es decir, se tiene $N=4$ y $R = 1/3$ y, por tanto, la dimensión de esta gráfica tan curiosa resulta ser:

$$D = \log 4 / \log 3 = 1{,}2618$$

Es decir, acabamos de descubrir un sorprendente objeto que es más que una línea ($D = 1$) y menos que un plano ($D = 2$). La clásica geometría de una, dos o tres dimensiones se abre así a un nuevo universo constituido por objetos de dimensión decimal.

[1] Si se parte inicialmente de un triángulo equilátero, lo que se genera es la famosa copo de nieve.

[2] Observe que la curva de Kock (y también las demás curvas patológicas que he citado) encajan de lleno en esta definición.

[3] En realidad, el término longitud no es muy apropiado, ya que no hay ningún instrumento capaz de medir todos y cada uno de sus detalles.

Este fractal que hemos visto un poco detenidamente es sólo uno de los múltiples objetos que pueblan este mundo extraordinario, donde los sistemas dinámicos, el movimiento browniano y el caos surgen interrelacionados. Como el espacio disponible es breve, únicamente voy a comentarle con cierto detalle un par de ejemplos.

CONJUNTOS DE JULIA Y MANDELBROT

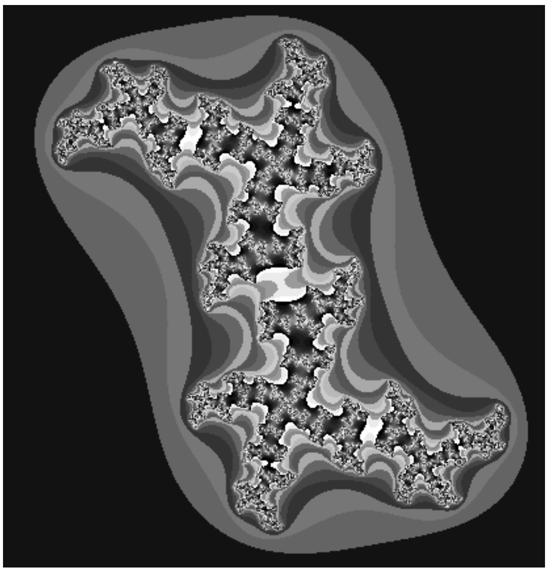
Los primeros, llamados así en honor del matemático francés Gaston Julia, tienen que ver con iteraciones dentro del plano complejo. Esto, que puede parecer algo muy complicado, es en realidad relativamente sencillo.

Consideremos dos números complejos: uno variable ($z = x + yi$) y otro constante ($c = a + bi$). A continuación tomamos como nuevo valor de z el resultado de calcular $z^2 + c$; en otras palabras (recuerde que $i^2 = -1$), asignamos:

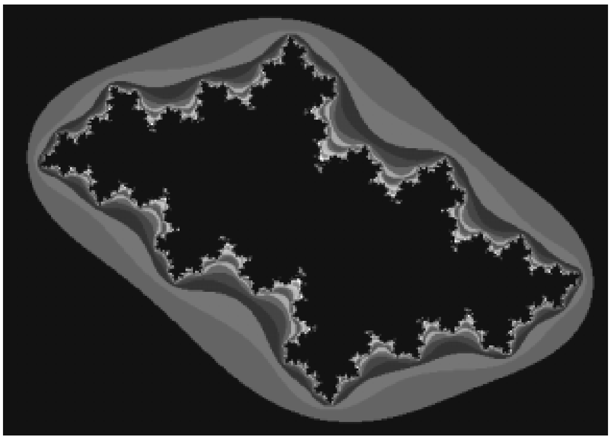
$$z = (x^2 - y^2 + a) + (2xy + b)i$$

Si reiteramos este proceso con el nuevo valor de z, obtenemos una sucesión de valores que puede estabilizarse o tender a infinito[4]. En este último caso, se dibuja el pixel[5] correspondiente a z en el color correspondiente al número de la iteración en que se sobrepasa la condición de parada.

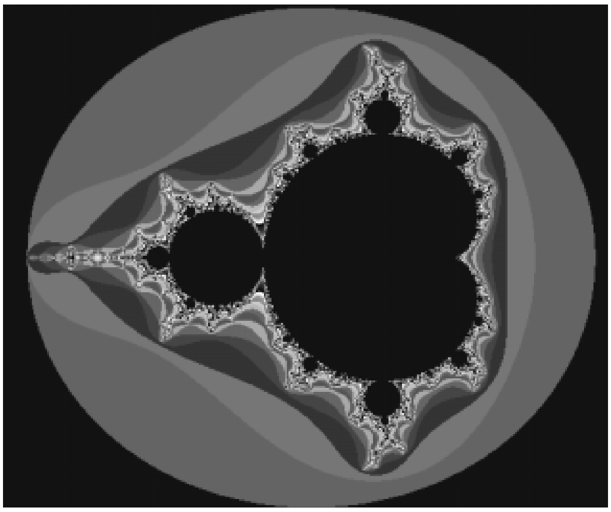
Siguiendo este proceso, tomando $c = 0.3 + 0.6i$, conseguiría el siguiente conjunto de Julia:



Otro distinto, aunque igualmente impactante, se generaría con $c = -0.5 + 0.5i$:



También podemos detenernos ahora en c y estudiar cuales de sus valores hacen que las iteraciones no tiendan a infinito. El conjunto de todos estos valores es el llamado conjunto de Mandelbrot, cuya gráfica quizá ya conozca:



FRACTINT

Si quiere apreciar en toda su plenitud la belleza de los fractales le aconsejo que descargue de Internet el excelente Fractint (¡que es freeware!), localizable en la

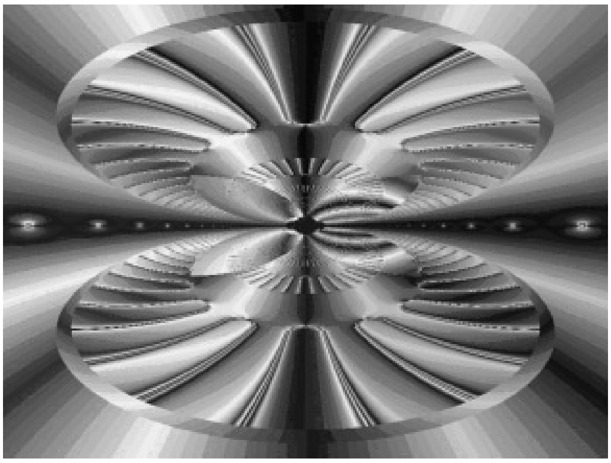
[4] Si desea codificar este proceso iterativo en su ordenador, la condición que se establece para considerar que z tiende a infinito es que su módulo sea superior a 10. Es decir, el proceso iterativo se interrumpirá si en algún paso se cumple que $x^2 + y^2 > 100$.

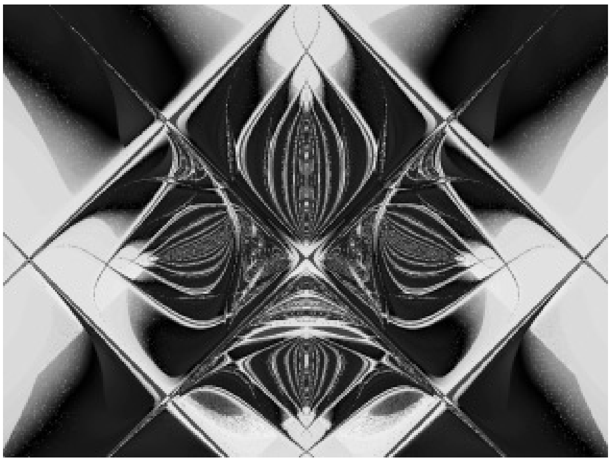
[5] Las dos coordenadas de un número complejo equivalen a las dos de un punto del plano; por tanto, podemos considerar un complejo como un pixel.

siguiente dirección, donde además encontrará una completísima información sobre este tema:

http://spanky.triumf.ca/www/fractint/fractint.html

Allí, además de una amplia documentación, también hallará varias galerías de artísticas imágenes fractales; como, por ejemplo:





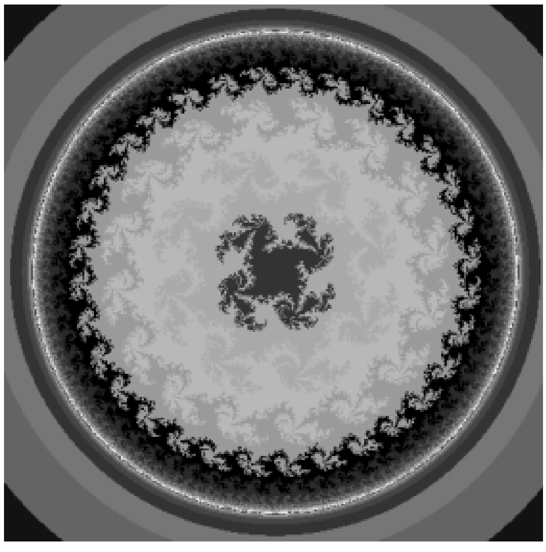
La última versión disponible en el momento de escribir este artículo es la 19.6 que, aunque está diseñada para MS-DOS, funciona sin problemas en Windows 95. El software se ofrece en un fichero comprimido de 655 Kb, por lo que deberá descomprimirlo[6]. Luego active Fractint y entrará en la nada sofisticada pantalla de introducción del programa.

Al pulsar Enter accederá al menú de opciones:

En primer lugar seleccione el modo de vídeo correspondiente a su ordenador y, después de visionar el fractal, pulse la tecla Esc para retornar a un menú principal ampliado[7].

Elija el tipo de fractal que desea generar[8] (la tecla F2 le muestra información sobre la generación) e introduzca los parámetros que considere adecuados. Recuerde que probar no cuesta nada y que hay infinitos parámetros diferentes a introducir, por lo que puede obtener gráficos nunca vistos anteriormente… ¡Un universo infinito a su disposición!

Cuando visualice su fractal en pantalla:

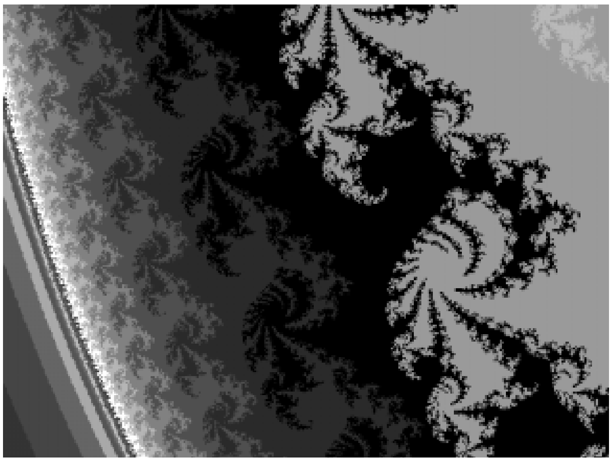


[6] WinZip es una muy buena opción para ello. Si todavía carece de él, puede encontrarlo en http://tucows.arrakis.es/window95.html

[7] Le aconsejo que invierta algo de tiempo en descubrir la utilidad de los diversos comandos existentes. Así, pulsando las teclas adecuadas durante la presentación del fractal podrá grabarlo en formato Gif, cambiar la paleta de colores, crear estereogramas, etc.

[8] Los conjuntos de Julia y Mandelbrot mostrados anteriormente están generados con este programa.

puede utilizar el ratón para seleccionar una parte rectangular cualquiera de él y, cuando pulse Enter, se le mostrará ampliada.



FRACTALES EN EL CINE

Los fractales se utilizan en múltiples campos científicos para realizar estudios y simulaciones de diversos procesos de aplicación en la industria: percolación, proteínas, turbulencias, meteorología, etc. Sin embargo, y como es lógico, estos modelos son muy intrincados y su comprensión queda para profesionales especialistas. Por tanto, parece como si nuestro papel se redujese al de meros espectadores... Y eso nos lleva directamente al cine.

Aunque pueda resultarle sorprendente, le aseguro que más de una vez habrá visto en la gran pantalla fractales generados por ordenador, especialmente en las películas de cienciaficción. ¿Quién no recuerda la Estrella de la Muerte o la luna de Endor de la ya clásica trilogía de La Guerra de las Galaxias?

¿Y por qué utilizar fractales? ... Imagine que en un film se precisa mostrar un cuerpo celeste como fondo, y sin una resolución excesiva. Si se almacenaran en memoria todas sus características físicas, esto exigiría un consumo enorme de recursos informáticos; en cambio un fractal conlleva menos necesidades y ofrece una imitación bastante aceptable visualmente. Lo mismo sucede si se pretende introducir en la película ficticiamente lluvia, tormentas, nubes, etc.

Actualmente la mayoría de las grandes películas taquilleras están basadas en los efectos visuales (¿dónde están esos maravillosos guiones de antaño?) y, por razones económicas, gran parte se realizan por ordenador. Tenga por seguro que bastantes de ellos están basados en algoritmos fractales.

COMPRESIÓN FRACTAL

En el campo de la transmisión de imágenes, y piense que un vídeo no es más que una sucesión de imágenes, los fractales se van consolidando como una alternativa para comprimirlas, frente a formatos tan populares como los Gif o Jpg.

La ventaja que ofrece este novedoso sistema, es la gran reducción que logra en el tamaño del fichero resultante, la relativa rapidez en generar la imagen y (recuerde que se trata de fractales) el mantenimiento de la calidad y nitidez cuando se amplia la imagen. Por el contrario, el tiempo necesario para comprimir fractalmente es notablemente superior al de los otros métodos.

Los algoritmos de compresión fractal son, como puede suponer, ciertamente complicados y no tiene sentido que intente explicar conceptos como transformaciones afines contractivas, bloques de rango y de dominio, algoritmos genéticos, fitness, etc.[9], así que nos limitaremos a ver como trabajar en nuestro ordenador con imágenes ya comprimidas fractalmente, que corresponden a ficheros de extensión Fif (Fractal Image Format).

Para visualizar los Fif que se le muestran on line, instale el programa Fractal Viewer que encontrará en[10]:

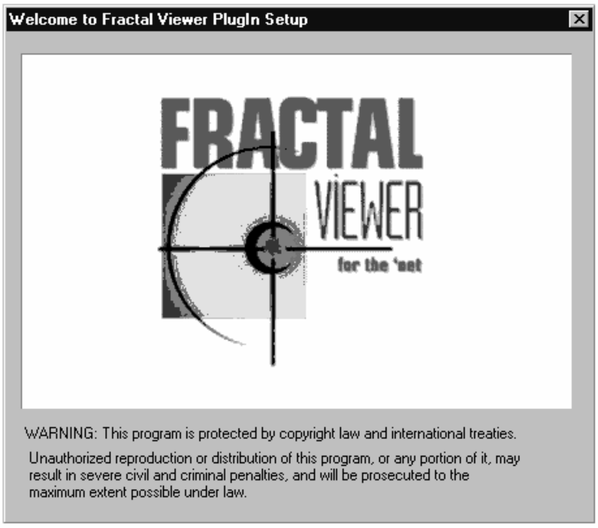
http://www.altamira-group.com/

[9] En caso de que tenga interés por estos temas, en Internet encontrará decenas de páginas comentándolos y varias de ellas en castellano. Por ejemplo:

http://journey.cem.itesm.mx/fractaltalk.html
http://journey.cem.itesm.mx/compresiondemo.html
http://www.geocities.com/ResearchTriangle/2004/compres.htm

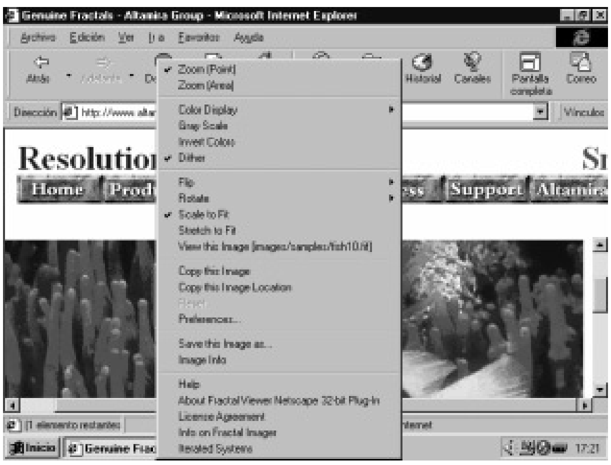
[10] Si también desea comprimir fractalmente sus imágenes, en esta misma la página se ofrece una demo del programa Genuine Fractals (necesita disponer de Photoshop 4.0 o software compatible con él).

Se ofrece en un fichero ejecutable de menos de un mega y, una vez descargado en su ordenador, cierre su navegador de Internet y haga doble clic sobre el ejecutable para proceder a la instalación.



En esa misma dirección podrá descargar y/o ver diversos ejemplos de imágenes fractales para comprobar que la instalación del software funciona correctamente.

Observe, cuando esté viendo on line un Fif, que el cursor del ratón se transforma en una lupa al colocarlo sobre la imagen y si hace clic con el botón izquierdo conseguirá un efecto de zoom. Pulsando el botón derecho desplegará el menú de opciones que le permite, entre otras cosas, grabar esa imagen en formato Fif o Bmp.



Si quiere visualizar ficheros Fif sin necesidad de conectarse a Internet, puede asociarlos a su navegador o utilizar el excelente Graphic Workshop, al que ya dediqué parte de un artículo en el Manual Formativo nº 5. Este programa, que le permite entre otras cosas cambiar el formato de las imágenes, transformarlas, efectuar carruseles, añadir texto, etc., es shareware y puede encontrarlo en:

http://tucows.arrakis.es/windows95.html

Ahora se ofrece la versión profesional 2.0 que ocupa casi cinco megas y viene en un fichero ejecutable que se encarga de la instalación. En esta nueva actualización se han mejorado y ampliado las prestaciones de este utilísimo programa, que ya eran bastantes buenas, por lo que es sumamente aconsejable que lo descargue de la dirección anterior.

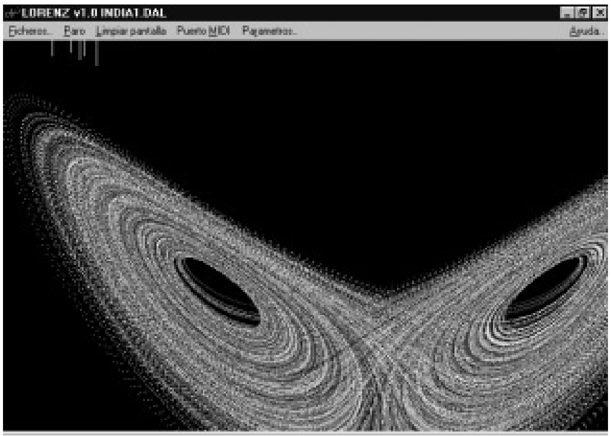
Para que se haga una idea de las potencialidades de la compresión fractal, nada mejor que un ejemplo. He tomado la siguiente imagen de 640x480 y 256 colores:

En formato Bmp ocupa alrededor de 300 Kb y, en cambio, almacenada en Fif ronda los 26 Kb, que es menos de la mitad del equivalente Jpg con una calidad de sólo el 75%. Como ve, la disminución en el tamaño de los ficheros gráficos comprimidos fractalmente es muy notable.

MÚSICA FRACTAL

Pero no sólo el tratamiento de imágenes está relacionado con los fractales[11]. También está muy en boga la composición de música generada por ordenador y basada en algoritmos fractales. En Internet, como siempre, podrá encontrar bastante información sobre este tema, por lo que le remito a que consulte en cualquier buscador. Sin embargo, no puedo dejar de citar la página personal de José Angel Navarro (http://www.distrito.com/fract/janc/) donde se ofrecen varios programas realizados por él mismo que le permitirán, según palabras del autor, “ver música y escuchar las imágenes”.

Por ejemplo, su Lorenz es francamente atractivo y la versión MS-DOS incluso graba los ficheros Midi generados.



Otra página sumamente interesante, y en la que encontrará cantidad de software para generar música fractal, además de galerías de imágenes, temas curiosos y programas de todo tipo, es:

http://www.organised-chaos.com/index.html

[11] Como curiosidad le diré que en Internet incluso puede encontrar una novela donde los fractales juegan su papel. Se trata de “Jan. Con la música a otra parte” de Diego José Sanmartín, que se oferta gratuitamente en la dirección: http://www.distrito.com/fract/janc/diego.html. Está escrita en Word y comprimida en un fichero Zip de unos cien Kb.