La cuarta dimensión

Julián Sanz Pascual

1. ¿UNA IDEA ESOTÉRICA O UNA IDEA CIENTÍFICA?

Aunque la idea de “la cuarta dimensión” ha sido a partir del siglo XIX cuando ha comenzado a alcanzar una cierta popularidad, parece, según Rucker, que ya había sido insinuada unos doscientos años antes por el platónico Henry More (1614-87). More se oponía a la idea de que los espíritus, los ángeles y las ideas platónicas pudieran existir sólo como abstracciones insubstanciales, sino que él creía que existían realmente y que ocupaban algún lugar en el espacio. Ahora bien, este espacio no podía ser el tridimensional a que estamos acostumbrados, sino que debía ser cuadridimensional (1).

Ya en el siglo XIX, fue el astrónomo alemán Johann Karl Friedrich Zöllner (1834-82) el que, con su *Cuarta dimensión y ocultismo*, más contribuyó a popularizar la idea espiritista de que los fantasmas proceden de la cuarta dimensión y de que es en ella donde hacen sus “diabluras” incomprensibles para nosotros. A este autor se refiere precisamente Julio Rey Pastor en una serie de conferencias que dio en el Ateneo de Madrid en 1915. Después de haber estado hablando del espacio formal, axiomatizado, dice.

“De intento hemos pasado por alto el número de dimensiones del espacio físico, problema extraño a la matemática. Omitimos, en consecuencia, las diversas razones de índole filosófica, matemática, química, etc., que se han aducido para probar la posibilidad de un espacio cuadridimensional: el argumento de los poliedros simétricos, el del átomo plurivalente, etc. Pero citaremos siquiera las curiosas teorías del astrónomo Zöllner, profesor de la Universidad de Leipzig hacia el año 70.

“Dio el famoso Slate unas sesiones de espiritismo - prosigue el ilustre matemático español -, en las cuales, una vez puesto en comunicación con los espíritus, desataba lazos inextricables, hacia desaparecer objetos diversos sin que los asistentes lograran dar con ellos, y después los hacía aparecer... No sólo creyó Zöllner en la verdad de tales experimentos, sino que ideó una teoría para explicarlos.

---

(1) R. RUCKER, *La cuarta dimensión*, Salvat, Barcelona 1987, p. 63 y ss.

"Pensemos en los animales planos que viven en una superficie, la cual constituye para ellos todo el espacio físico. Imaginémonos trasladados a ese mundo plano, análogo al de la conocida novela inglesa *Flatland* (Más adelante hablaremos de ella). Si retiramos un objeto de ese mundo, deja de ser visible para sus habitantes; y para justificar esta desaparición, y su reaparición después, tendrán que idear esos pobres bichos alguna explicación sobrenatural. Pues bien, dice Zöllner: ¿No estaremos nosotros en un caso análogo? Nuestros sentidos no perciben más allá de un espacio de tres dimensiones; para un *médium* que esté en relación con seres exteriores a nuestro espacio, y que goce de una visión perfecta (privilegiada), capaz de percibir la cuarta dimensión, podrá alejar objetos de nuestro espacio visible y hacerlos reaparecer, efectuar operaciones para nosotros imposibles, como son: lograr la coincidencia de un tetraedro con su simétrico (un equivalente a hacer coincidir dos guantes de distinta mano), soltar lazos inextricables, etc..., que en el espacio de cuatro dimensiones no ofrecen dificultad" (2).

La verdad es que, según la historia que se cuenta, Zöllner no consiguió probar su teoría con hechos y menos aún librar al famoso Slate de la sentencia que un tribunal inglés había dictado contra él por embaucador. Y me parece que, hoy por hoy, esta pretendida relación entre la cuarta dimensión y las ciencias ocultas no pasa de ser vana palabrería.

La ciencia seria, sin embargo, ha tratado de darle salida al tema de la cuarta dimensión identificándola con el tiempo. La figura científica que se considera más ligada a esta concepción es Albert Einstein (1879-1955). En su primera *Memoria sobre la relatividad*, publicada en 1905, propuso que a las tres dimensiones del espacio físico se añadiese el concepto "tiempo", la cuarta dimensión, teoría que había sido esbozada ya por su maestro Minkowski. Henri Poincare (1954-1912) se pronuncia en un sentido muy similar. Después de haber especulado ampliamente sobre el tema de la cuarta dimensión, concluye: "Todo sucede como si el tiempo fuese una cuarta dimensión del espacio, como si el espacio de cuatro dimensiones que resulta de una combinación del espacio ordinario y del tiempo, pudiese girar no sólo en torno a un eje del espacio ordinario, de manera que el tiempo no sufriese alteración, sino en torno a un eje cualquiera.... Para que la comparación sea matemáticamente justa, es necesario atribuir valores puramente imaginarios a la cuarta ordenada del espacio" (3).

Conviene decir que el tema de la cuarta dimensión y su relación con el tiempo era algo que estaba latente en el ambiente científico y aún literario de aquellos años. Así, no faltan autores que atribuyen el origen de la idea al Reverendo Edwin Abbott Abbott, director-jefe de la Escuela de la Cuidad de Londres. Este hombre escribió hacia 1895 un libro de ciencia-ficción titulado *Flatland, un cuento en varias dimensiones,* que es al que se ha referido Rey Pastor. Primero describe un mundo en dos dimensiones, un simple plano, habitado por seres inteligentes "incapacitados para comprender nada ajeno a su espacio y sin medios para escapar de la superficie en que viven". Los habitantes de ese extraño país son figuras planas y su forma depende del estado social de cada uno. Las mujeres, inferiores en la escala jerárquica, son simples líneas rectas; los soldados y obreros destinados a los trabajos más pesados son triángulos; la clase media tiene forma de triángulo equilátero; los hombres de las profesiones liberales y los señores son cuadrados; y así sucesivamente siguiendo el orden poligonal hasta llegar a los hombres de iglesia formados por polígonos de infinito número de lados, tan diminutos cada uno que semejan circunferencias. Fig. 1.

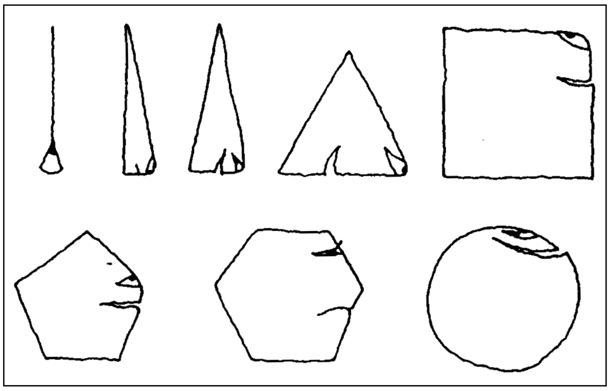

Figura 1. Ocho habitantes de Planilandia: Mujer, Soldado, Obrero, Comerciante, Profesional, Caballero, Noble y Sumo Sacerdote. *(R. Rucker).*

(2) J. REY PASTOR, *Introducción a la matemática superior*, Biblioteca Corona, Madrid 1916, pp. 56-57.
(3) POINCARE, H., *El espacio y el tiempo*, Universidad Autónoma de Méjico 1964, p. 98.

El cuento está relatado en primera persona por un cuadrado, el Doctor Abbott sin duda, que tiene la desgracia de enfrentarse un día con la esfera, un habitante de la tercera dimensión, que les visita. De acuerdo con las convenciones fijadas por el autor, en Flatland no es posible ver la esfera, sino sólo una circunferencia de ésta, la que, a partir de un punto inicial, cuando toca el plano, se va dilatando hasta llegar al círculo máximo, para después ir disminuyendo hasta convertirse en un punto y desaparecer. Fig. 2.

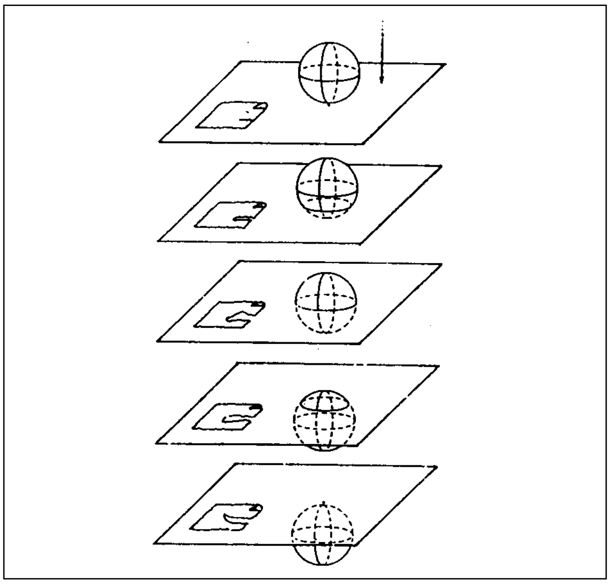

Figura 2. Esfera A atraviesa Planilandia. *(R. Rucker).*

La esfera realiza una serie de descensos a través de Flatland y en sus trayectos explica al "cuadrado" las maravillas de *Spaceland* y le hace comprender las limitaciones a que está reducido en su mundo plano. Al final, "el extranjero" (la esfera) le lleva a visitar el espacio de tres dimensiones. A su vuelta, el cuadrado está ansioso por enseñar a sus conciudadanos la nueva teoría que le ha sido revelada; pero, muy pronto, los clérigos le acusan de hereje, le condenan a prisión perpetua y acaba encerrado en una celda.

Parece claro que la idea matriz de *Flatland* está tomada de las teorías de Zöllner y también del malogrado matemático inglés Willian Kingdon Cliford (1845-79), contemporáneo por tanto de Zöllner, y que utiliza la misma analogía del mundo plano en el que se supone habitan animales. "La hipotética población que viviera en la superficie - dice -, y que no tiene idea de una tercera dimensión, podría, sin sospechar en absoluto esta tercera dimensión, hacer una determinación muy exacta de la naturaleza de su *locus in quo* (lugar donde se encuentra)" (4). Lo que nos interesa señalar aquí es que no han faltado autores que han pretendido ver en *Flatland* un cierto carácter profético con respecto a la relación entre la cuarta dimensión y el tiempo, tal como lo concibieron después Einstein y Poincaré. Así lo hace ver una carta anónima publicada en *Nature* (la famosa revista británica) el 12 de febrero de 1920. Según esta carta, el doctor Abbott "pide al lector, consciente de la tercera dimensión, que imagine una esfera cayendo sobre Flatland y atravesando su plano. ¿Cómo se explicarán esos habitantes tan extraño fenómeno?... Lo único que pueden observar es un objeto circular que se dilata y crece, y luego se contrae; y sólo podrán comprender como *cambio temporal* lo que un observador externo, del mundo de tres dimensiones, achaca a un movimiento en el espacio. Pasemos por analogía a un movimiento en la cuarta dimensión a través de nuestro espacio. Representémonos el pasado y el futuro del universo en un espacio de cuatro dimensiones visible sólo para los seres conscientes de la cuarta dimensión. Si existe movimiento de nuestro espacio en relación al nuevo mundo imaginario, resulta que todos los cambios que observamos y que achacamos al tiempo son sencillamente debidos a ese movimiento; luego todo nuestro pasado y nuestro futuro existen en la cuarta dimensión" (5).

2. EL TIEMPO Y LA CIENCIA MÁS ACTUAL

La lectura del exitoso libro de Stephen W. Hawkig *Historia del tiempo, Del big bang a los agujeros negros* (Crítica, Barcelona 1988), nos lleva a la conclusión de que la ciencia más actual se ha desvinculado ya de esa idea de identificación entre el tiempo y la cuarta dimensión. Es muy significativo que el autor comience estudiando en el primer capítulo la historia de la idea de tiempo en la filosofía. El tiempo representa lo con-

(4)Ver: J. R. NEWMAN, *El mundo de las matemáticas*, Grijalbo, Barcelona 1974, tomo IV, p. 154.
(5) Ibídem, tomo VI, p. 321 y ss.

tingente de las cosas, lo incierto, lo dinámico, lo ilógico digo yo en mi libro *Primer discurso de ilógica* (Tecnos, Madrid 1992), mientras que el espacio representa lo necesario, lo cierto y lo estático, lo lógico en una palabra.

La diferencia entre el espacio y el tiempo se entiende muy bien, creo yo, en el lenguaje ordinario: en lo que va de la escritura a la lectura. Aquella es espacial, ésta es temporal. La primera nos ofrece los signos como inmóviles (estáticos) al sentido de la vista, mientras que la segunda nos los ofrece como móviles (dinámicos) al del oído: es lo que nos permite al sentido entender de manera no idéntica signos que visualmente son idénticos. Ejemplo: “Sal a la *calle* y di a esa gente que se *calle*”. Visualmente (espacialmente) los dos términos “calle” son idénticos, pero al sentido auditivo (temporalmente) son distintos. Esto tiene la ventaja de que con la misma letra se puedan hacer muchas músicas: “Fin de un modelo político”, “Fin de un político modelo”. Tiene el inconveniente de que resulta muy difícil, por no decir imposible, el dominio de la semántica mediante un método, lo que se convierte en el muro contra el que se estrella hoy la moderna informática.

En lo que se refiere al mundo físico, se acepta que la realidad de éste es dinámica, temporal, pero no sólo las cosas animadas, sino también las inanimadas. El Premio Nobel de Química Ilya Prigogine ha teorizado esto en lo que él llama “estructuras disipativas” (6). Podemos entender que “estructura disipativa” es lo mismo que “estructura abierta”. En el lenguaje ordinario, las palabras responden a una estructura disipativa o abierta, es decir, que sus posibilidades de significación nunca están cerradas o agotadas, sino que se van abriendo a medida que, en el uso inteligente y sensible del lenguaje, se van produciendo desequilibrios, a medida que los signos se van *desespacializando* o *desidentificando;* o lo que es lo mismo, a medida que se van *temporalizando*. En el lenguaje ordinario esto ocurre siempre que de la escritura se pasa a la lectura, cuando de la letra se pasa a la música.

3. LA CUARTA DIMENSIÓN Y LAS MATEMÁTICAS.

Contra lo que hemos visto que decía Rey Pastor, que la cuarta dimensión es “un problema extraño a la matemática”, pienso que, si en alguna ciencia tiene sentido hablar de ella, es precisamente en ésta, aunque quizá deberíamos hablar mejor de “las matemáticas”. ¿O es que el término “dimensión” y su correspondiente concepto no pertenecen a la más pura geometría? Claro está que, para entrar en la “cuarta”, algo completamente nuevo, que no “extraño”, es necesario abandonar el puro formalismo, el de la matemática, y adentrarse por los inseguros y resbaladizos caminos de la intuición, los de las matemáticas.

De acuerdo con el llamado “último teorema de Fermat”, la ecuación de tres cubos, $x^3 = y^3 + z^3$, no tiene soluciones racionales (7). Para un matemático formalista, las ecuaciones cúbicas diofánticas han terminado ahí. Si no es posible solucionar racionalmente una ecuación de tres cubos, ¿en qué cabeza cabe que se pueda solucionar una de cuatro o más? Sin embargo, para un matemático intuicionista, parece claro que, si la ecuación de tres cubos no puede tener soluciones, la de cuatro sí ha de tenerlas. La razón es ésta: si un plano está determinado por tres puntos no en la misma recta, un espacio lo ha de estar por cuatro no en el mismo plano. Fig. 3.

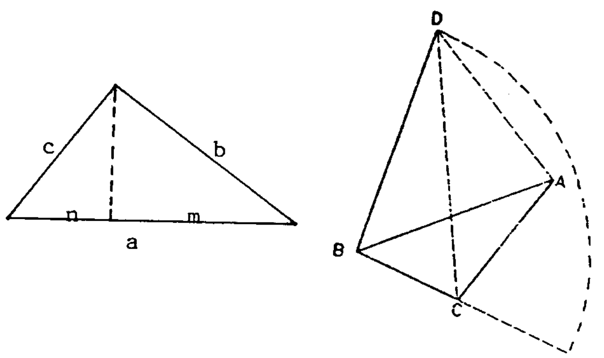

Figura 3.

(6) I. PRIGOGINE, *El nacimiento del tiempo,* Tusquets, Barcelona 1991, p. 32.
(7) Ver, por ejemplo: C. GOLDSTEIN, “El teorema de Fermat”, Rev. *Mundo científico,* Barcelona, mayo 1994, p. 419.

En el primer caso, la relación de esos tres puntos será cuadrática, que es la que corresponde a la naturaleza del plano: es el teorema de Pitágoras como relación más simple, $x^2 = y^2 + z^2$, que tiene múltiples soluciones racionales. En el segundo caso, la relación de los cuatro puntos ha de ser cúbica, $x^3 = y^3 + z^3 + t^3$, que es la que corresponde a la naturaleza del espacio. En efecto, por simple tanteo, se puede descubrir que $6^3 = 5^3 + 4^3 + 3^3$. De esta ecuación apenas se han ocupado matemáticos como Euler en el siglo XVIII (8), Ramanujan en el XX y dos o tres más que yo sepa. El indio Ramanujan tiene una fórmula espléndida que permite obtener nuevas soluciones, además de las apuntadas:

$$x = 3a^2 + 5ab - 5b^2$$
$$y = 4a^2 - 4ab + 6b^2$$
$$z = 5a^2 - 5ab - 3b^2$$
$$t = 6a^2 - 4ab + 4b^2 \quad (9)$$

Dando valores a las variables "a" y "b", se obtienen soluciones como éstas, que se pueden comprobar:

3, 36, 37, 46; 18,19, 21, 28; 27, 30, 37, 46.

Yo mismo he ideado una fórmula que, a partir de soluciones ya conocidas, permite obtenerlas nuevas:

$$m = \frac{d^2 + a^2 - b^2 - c^2}{a + b + c - d} \qquad \begin{aligned} x &= a - m \\ y &= b + m \\ z &= c + m \\ t &= d + m \end{aligned}$$

Prueba, con las soluciones 3, 4, 5, 6:

$$m = \frac{6^2 + 3^2 - 4^2 - 5^2}{3 + 4 + 5 - 6} \qquad \begin{aligned} x &= 3 - 2/3 = 7/3 \\ y &= 4 + 2/3 = 14/3 \\ z &= 5 + 2/3 = 17/3 \\ t &= 6 + 2/3 = 20/3 \end{aligned}$$

En efecto, simplificando, se puede comprobar que $7^3 + 14^3 + 17^3 = 20^3$

Esta fórmula tiene dos posibilidades más:

$$m = \frac{d^2 - a^2 + b^2 - c^2}{a + b + c - d} \qquad \begin{aligned} x &= a + m \\ y &= b - m \\ z &= c + m \\ t &= d + m \end{aligned}$$

A partir de las soluciones 3, 4, 5, 6, obtenemos 6, 1, 8, 9.

$$m = \frac{d^2 - a^2 - b^2 + c^2}{a + b + c - d} \qquad \begin{aligned} x &= a + m \\ y &= b + m \\ z &= c - m \\ t &= d + m \end{aligned}$$

A partir de las soluciones 3, 4, 5, 6, obtenemos 9, 10, - 1, 12.

4. LA ECUACIÓN DE LOS CUATRO CUBOS EN LA GEOMETRÍA Y EN LA ARITMÉTICA

Es de suponer que, si la ecuación de tres cuadrados ha dado lugar a toda una geometría, la del plano, la de cuatro cubos ha de dar lugar a otra geometría, la del espacio. El capítulo de la geometría del espacio, **la verdadera geometría del espacio** se entiende, a partir de la ecuación de cuatro cubos, está en blanco, salvo lo poco que yo he publicado. Entre ello está, aparte de algunas construcciones nuevas que he conseguido hacer, una secuencia que permite pasar de las relaciones cúbicas en el espacio a las cuadráticas en el plano. La inversa parece que no es posible, al menos *a priori*, lo que quiere decir que la verdadera geometría del espacio implica la del plano, pero no a la inversa. Dicho en otros términos, que a partir de la ecuación de cuatro cubos se puede deducir la de tres cuadrados, pero no a la inversa (10).

En este breve apunte, sólo diré que, combinando construcciones geométricas y desarrollos algebraicos, he conseguido algo tan espectacular y tan nuevo como solucionar (con soluciones racionales positivas) una ecuación diofántica de un número impar de cubos, a partir de la de siete.

Partiendo de las soluciones 7, 14, 17, 20, tenemos que $7^3 + 14^3 = 20^3 - 17^3$; de aquí $7^3 (1^3 + 2^3) = 3087 = 3^2.7^3$. Dividiendo por 7^3, queda $1^3 + 2^3 = 3^2 = (1 + 2)^2$.

(8) L. EULER, *Introductio in analysin infinitorum*, Lausanne, Apud Marcum-Michaelem Bousquet et Socios, 1748, tomo II, pág. 202.
(9) Ver: HARDY-WRIDTH, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford 1956, pp. 190-203.
(10) Ver: SANZ PASCUAL, J., *Primer discurso de ilógica*, Tecnos, Madrid 1992, p. 160 y ss.
También: "La cuarta dimensión: una alternativa al teorema de Fermat", en Rev, *Puig Adam*, Madrid, febrero 1996, pp. 65- 73.
Teorema de los cuatro cubos y ecuación del espacio real, (Opúsculo, Segovia 1975)

Si generalizamos, tenemos este teorema: La suma de los cubos de la serie de los números enteros es igual al cuadrado de su suma (11)

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$$

Si sumamos los cubos de los trece primeros números, nos da 8281, que es el cuadrado de 91. Como $91 = 4^3 + 3^3$, tenemos:

$$91^2 = (4^3 + 3^3)^2 = 16^3 + 9^3 + 12^3 + 12^3$$

Sustituyendo, nos quedaría:

$$16^3 + 9^3 + 12^3 + 12^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 13^3$$

Reduciendo términos semejantes y eliminando equivalencias, nos queda la ecuación de siete cubos:

$$16^3 = 13^3 + 11^3 + 7^3 + 6^3 + 3^3 + 1^3$$

De aquí, he llegado a solucionar la ecuación de hasta trece cubos:

$$96^3 = 78^3 + 66^3 + 42^3 + 25^3 + 24^3 + 18^3 + 17^3 + 15^3 + 14^3 + 12^3 + 7^3 + 6^3.$$

5. BREVE APUNTE SOBRE INFORMÁTICA

A la vista de un resultado tan espectacular como el que acabamos de ofrecer, especialmente la solución de una ecuación de trece cubos, cabe preguntarse si la informática tiene algo que decir en este terreno, si sus más potentes y sofisticadas calculadoras serían capaces de encontrar una solución así. Se entiende, sin que los que las manejan conozcan todo lo que acabamos de exponer, ni siquiera que tales soluciones existen. Pero vamos a concederles que sepan esto último, incluso que sepan también que tales soluciones están comprendidas entre los cien primeros números. El que sepa algo de combinatoria, que aplique la fórmula y verá el número de combinaciones posibles que le sale: las de cien elementos tomados de trece en trece. ¡Una cantidad astronómica! ¿Cuanto tardaría en hacer tantas operaciones el más potente ordenador de hoy? Esto por la vía del análisis. Mas por la vía de la síntesis ¿existe alguno capaz de descubrir un método artesanal e intuitivo tan sencillo como el que a un simple profesor de Filosofía le ha permitido llegar a esa solución?

En la primavera pasada, el ajedrecista Gari Kaspárov sudó tinta el hombre al ver cómo una máquina le ganaba la partida. "Jaque al hombre" pudimos leer en un titular de prensa. Sin embargo nada más falso, pues no le ganó una máquina, sino un grupo de expertos con el auxilio de una máquina en la que habían metido un programa con las jugadas de los mejores ajedrecistas de todos los tiempos. Es que la ventaja del ordenador no es su capacidad de cálculo, su cualidad, sino su cantidad, su rapidez, que es otra cosa.

CONCLUSIÓN

Como se ve, el tema de la cuarta dimensión comenzó como algo esotérico, después se pretendió hacer de ello algo científico y finalmente, yo creo, puede acabar muy bien como algo puramente matemático. No sé para qué puede servir una ecuación de trece cubos, por ejemplo, pero lo cierto es que su solución sólo es posible a partir de que al espacio se le considere de cuatro dimensiones. El espacio "real" más simple, como se sabe, es el tetraedro, lo mismo que el plano "real" más simple es el triángulo. El primero, en sí mismo, sólo es determinable cuadridimensionalmente, lo mismo que el segundo lo es tridimensionalmente. Esto es pensar en pitagórico, aplicando la intuición, frente al pensamiento euclídeo, que es radicalmente formalista, y el que ha venido dominando en las matemáticas.

(11) Este enunciado se corresponde con el de Nicómaco de Gerasa (año 100 d. C), sólo que él llegó al mismo por vías muy distintas. Ver: G. FREY, *La matematización de nuestro universo,* G. Del Toro, Madrid 1972, p. 13.